Третий тур олимпиады для 9-10 классов

1. Как известно, запись числа в большинстве позиционных системах счисления определяется *базисом* и набором *цифр*, которые могут использоваться в каждом из разрядов (в некоторых системах счисления в каждом из разрядов используется свой набор цифр). Рассмотрим двоично-десятичную систему, которая относится к классу смешанных P-Q-ичных систем счисления. В этой системе счисления каждая цифра числа в десятичной записи заменяется на ее двоичное представление в четырех разрядах (исключение составляет старшая цифра, там можно оставлять только значащие двоичные цифры). Например, 2019_{10} = $10\ 0000\ 0001\ 1001_{2\text{-}10}$ (здесь пробелы добавлены лишь для удобства). Выпишите базис этой системы счисления (10 первых элементов базиса для натуральных чисел и принцип его формирования для произвольных чисел, в том числе дробных). Ответ обосновать.

2. Нарисуйте комбинационную схему, состоящую из как можно меньшего количества логических элементов NOR (notor) для выражения логической функции двух переменных: *A*and*B*or (not*A*) and (not*B*).
Другие логические элементы использовать нельзя. Помимо рисунка схемы, напишите цепочку тождественных преобразований, для выражения данной функции через операцию NOR.

3. Паша и Вова играют в следующую игру. Им дается число n. Они ходят по очереди и Паша ходит первым. На своем ходу игрок выбирает число d так, что d — натуральное число от 1 до n–1 и d — делитель n (исключение – число 1, для него можно выбрать d = 1 и выиграть). После этого d вычитается из n. Игрок, который не может сделать ход, проигрывает. Определите, для каких натуральных n Паша гарантированно выигрывает при оптимальной игре вне зависимости от игры Вовы? Ответ обосновать.

4. Встретились *7* гостей. Известно, что каждый гость решил подарить подарок другому гостю так, что каждый гость получит один подарок. Сколько существует различных вариантов получения подарков гостями при таких условиях? Комбинация считается отличной от других, если хотя бы один гость получил подарок от другого гостя.Ответ обосновать.

5. Номер билета из n цифр, где nчётное, называется “почти счастливым”, если в нем сумма первых $n/2$ цифр ровно на единицу отличается от суммы остальных цифр. Например, 123005 или 123700. Номер может начинаться с любого числа нулей. Определите количество “почти счастливых билетов” для следующих значений n:

1) n = 6

2) n = 10

3) n = 20

4) n = 100

Опишите, как именно вы получили соответствующие значения.