

3 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

Математика

10 класс

1. Учитель записал на доске равенство $a + b - ab = 1$ и спросил: «Что можно сказать про число b , если известно, что a не целое?»
Даша сказала: «Число b тоже нецелое».
Маша сказала: «Нет, наверное оно целое и положительное».
Глаша сказала: «А я думаю, что оно целое отрицательное».
Кто из девочек прав?
2. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 2019. На прямой AC отмечены точки M и N так, что $\angle MBN = 135^\circ$. Найдите наименьшую возможную длину MN .
3. Найти наибольшее значение выражения $\sin(\cos x) + \cos(\sin x)$ и все числа x , при которых это наибольшее значение достигается.
4. В треугольнике ABC H – точка пересечения высот, A' , B' и C' – середины сторон BC , CA и AB соответственно. Окружность ω с центром в точке H пересекает прямую $B'C'$ в точках X_1 и X_2 , прямую $C'A'$ в точках Y_1 и Y_2 и прямую $A'B'$ в точках Z_1 и Z_2 . Докажите, что

$$AX_1 = AX_2 = BY_1 = BY_2 = CZ_1 = CZ_2.$$

5. На клетчатой доске $n \times n$ часть клеток отмечают крестиками так, что в каждом квадрате 4×4 отмечена по крайней мере половина клеток. При каждом четном $n > 3$ найти наименьшее возможное количество отмеченных клеток.