

2 тур интернет-олимпиады СУНЦ МГУ

Математика

10 класс

1. Найти число решений уравнения

$$x^2 - [x^2] = (x - [x])^2,$$

лежащих на отрезке $[1, 100]$. ($[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x .)

2. Стороны AB, BC, CD, DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ содержат соответственно вершины E, F, G, H ромба $EFGH$. Известно, что $AC \parallel EF$, $BD \parallel FG$ и $AC : BD = 5$. Найти отношение площадей $S_{ABCD} : S_{EFGH}$.
3. Имеется кусок проволоки длины 30. Петя Торт хочет согнуть ее и получить треугольник с периметром 30 и целыми сторонами. Сколько различных треугольников у него может получиться?
4. Найти наибольшее возможное значение выражения

$$\frac{81xyz}{(10+x)(x+y)(y+z)(z+160)}$$

при положительных значениях x, y, z .

5. Дан многочлен $26(x + x^2 + \dots + x^n)$. Требуется представить его в виде суммы не обязательно различных многочленов вида $a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. При этом необходимо, чтобы в каждом из многочленов все коэффициенты a_i были попарно различными натуральными числами от 1 до n . При каких $n > 1$ такое возможно?
6. На доске записана последовательность нулей и единиц. Каждую минуту профессор Алексей выполняет одну из следующих операций:
- (i) стереть две стоящие подряд единицы;
 - (ii) стереть три стоящие подряд нуля;
 - (iii) заменить стоящие подряд цифры 01 на цифры 100.
- (Например, если начать со строки 0101, то можно сначала применить операцию (iii) к последним двум цифрам и получить 01100, после этого применить операцию (i) и затем операцию (ii), и получить пустую строку.) Профессор не успокоится, пока на доске не останется последовательность длины меньше трех. Сколько существует последовательностей длины 10, начав с которых, профессор так и не сможет обрести покой?

Если ответом в задаче является дробное число, введите его разделив целую и дробную часть запятой. Например: «10,24».

Если в задаче несколько вариантов ответа, введите их все в порядке возрастания, разделив знаком «;». Например: «1;2,5;10;14».