Часть I

Электростатика

1. Закон Кулона. Закон сохранения заряда

В 1733 году французский физик Ш. Дюфе опубликовал результаты своих опытов по электризации различных тел. Из них он сделал вывод, что существуют два вида электричества. Одно электричество возникает при натирании *смолы*, воска, шелка и многих других веществ. Второй вид электричества появляется при натирании *стекла*, горного хрусталя, драгоценных камней, шерсти и т.д. Поэтому Дюфе назвал первое из них *смоляным* электричеством, а второе – *стеклянным*. Тело, обладающее любым из двух видов электричества, притягивает к себе легкие тела (именно это свойство еще с античных времен обозначалось словом «электричество»). При этом тела, заряженные одним и тем же электричеством (смоляным или стеклянным), отталкивают друг друга, но если одно тело заряжено стеклянным электричеством, а другое смоляным, то они взаимно притягиваются. Позже Франклин предложил называть стеклянное электричество положительным, а смоляное – отрицательным. Таким образом, в первой половине XVIII века были установлены фундаментальные факты: наличие двух видов электричества и существование электростатических сил притяжения и отталкивания.

Естественно, возник вопрос о том, как появляется у тел электричество. Окончательный ответ на него был получен на рубеже XIX – XX веков. Теперь мы знаем, что в состав любого атома входят положительно заряженное ядро и отрицательно заряженные электроны. В нейтральном атоме суммарный заряд электронов равен заряду атомного ядра. Тело, состоящее из нейтральных атомов и молекул, имеет суммарный электрический заряд, равный нулю. Если же в результате какого-либо взаимодействия часть электронов переходит от тела A к телу B, то тело B приобретает отрицательный электрический заряд, а тело A – положительный.

Начало количественного изучения электрических явлений относится к концу XVIII века, когда в 1785 году Кулон установил на опыте закон взаимодействия электрических зарядов.

Для заряженных тел произвольных размеров сформулировать такой закон в простой форме нельзя, т. к. сила взаимодействия протяженных тел зависит от их формы и взаимной ориентации. Однако форма тел и их взаимная ориентация перестают сказываться, если размеры тел достаточно малы по сравнению с расстоянием между ними. Поэтому в наиболее общем виде закон электростатического взаимодействия можно установить только для *точечных зарядов*.

Под **точечным зарядом (заряженной частицей)** в физике понимают протяженное заряженное тело, размерами которого *в условиях данной задачи* можно пренебречь.

В частности, если мы рассматриваем взаимодействие двух заряженных тел, то их можно считать точечными зарядам, если их размеры малы по сравнению с расстоянием между ними.

В своих опытах Кулон измерял силы взаимодействия заряженных шариков с помощью крутильных весов. На тонкой проволоке была подвешена стеклянная палочка с двумя металлическими шарами на концах (один из шаров играл роль противовеса). Одному из шаров сообщался электрический заряд, напротив него устанавливался другой неподвижный заряженный шар. В положении равновесия измерялось расстояние между центрами заряженных шаров, а сила взаимодействия между ними определялась по углу поворота стеклянной палочки, закручивающей нить подвеса.

В результате этих опытов Кулон установил, что *сила взаимодействия двух точечных зарядов A и B направлена вдоль соединяющей их линии и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними*:

$$F_{AB} \sim \frac{1}{R^2}. \tag{1.1}$$

Однако сила взаимодействия между шариками зависит еще от величин их зарядов. Но поскольку Кулон делал самые первые шаги по количественному изучению электрических явлений, то у него не было и в принципе не могло быть метода измерения заряда на шарах. Наиболее строго эту проблему можно было бы решить следующим образом.

Сообщим шарикам A и B некоторые (неизвестные) заряды, поместим шарики на определенном расстоянии и измерим силу F_{AB} взаимодействия между ними. Заменим далее шарик B другим (третьим) заряженным шариком C и измерим силу F_{AC} взаимодействия между A и C (при том же расстоянии между шариками, что и в первом случае). Если теперь изменить произвольным образом заряд шарика A и опять измерить силы взаимодействия шарика A с шариками B и C (при сохранении расстояния между шариками), то опыт показывает, что отношение сил $F_{AB}: F_{AC}$ остается неизменным, т. е. не зависит от величины заряда шарика A. Это означает, что указанное отношение $F_{AB}: F_{AC}$ зависит только от зарядов шариков B и C.

Это фундаментальное свойство сил электростатического взаимодействия справедливо только для точечных зарядов. Именно оно позволяет ввести количественную меру *электрического заряда, как физической ве-*

личины, характеризующей интенсивность электрического взаимодействия. Итак, **по определению** *отношение величин электрических зарядов q_B и q_C двух заряженных частиц B и C равно отношению сил взаимодействия этих частиц с третьей заряженной частицей A*:

$$\frac{q_B}{q_C} = \frac{F_{AB}}{F_{AC}}. \tag{1.2}$$

При этом возможность такого определения следует из экспериментально установленного факта независимости правой части (1.2) от степени заряженности частицы A (лишь бы она была хоть как-то заряжена).

Заметим, что соотношение (1.2) является конструктивным определением, т. к. указывает прямой способ сравнения величин двух точечных зарядов. При этом, если считать силу отталкивания положительной, а силу притяжения отрицательной (или наоборот), то соотношение (1.2) позволяет определять не только величину, но и знак заряда.

С другой стороны, соотношение (1.2) можно интерпретировать несколько иначе, переписав его с учетом (1.1) в виде:

$$\frac{F_{AB}}{q_B} = \frac{F_{AC}}{q_C} = \frac{G_A}{R^2}, \tag{1.3}$$

где G_A – некоторый коэффициент пропорциональности, зависящий только от степени заряженности частицы A (он не может зависеть, например, от степени заряженности частицы C, т. к. первое отношение в (1.3) от неё не зависит). Соотношение (1.3) наглядно показывает, что при введенном выше определении величины заряда сила взаимодействия двух шариков (точечных зарядов) оказывается пропорциональной заряду одного из шариков:

$$F_{AB} = \frac{G_A}{R^2} q_B.$$

Но оба шарика равноправны, поэтому сила F_{AB} должна быть пропорциональна величине каждого из зарядов q_A и q_B. Таким образом, величина силы взаимодействия двух точечных зарядов равна:

$$F_{AB} = k\frac{q_A\, q_B}{R^2}, \tag{1.4}$$

где $k = G_A/q_A$ – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц измерения заряда, расстояния и силы. Соотношение (1.4) называют **законом Кулона**. Чтобы выразить не только величину силы, но и ее направление, закон Кулона можно представить в векторной форме:

$$\vec{F}_{AB} = -k\frac{q_A q_B}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A|^3}(\vec{r}_B - \vec{r}_A), \tag{1.5}$$

где $\vec{F}_{AB}$ – вектор силы, действующий на заряд A со стороны заряда B, а $(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$ – радиус-вектор, направленный от заряда A к заряду B. Знак минус в этой формуле отражает тот факт, что два одноименных заряда отталкиваются.

Итак, *пропорциональность силы взаимодействия двух точечных заряженных тел произведению их зарядов формально является следствием определения величины заряда, а фактически вытекает из того факта, что отношение сил взаимодействия двух зарядов с третьим зарядом не зависит от величины последнего*.

Однако в своих опытах Кулон пошёл другим путём: он использовал дробление заряда. Исходя из соображений симметрии, Кулон предполагал, что при соприкосновении металлического шарика, заряженного зарядом q, с незаряженным шариком такого же радиуса, электрический заряд делится на две равные части и на каждом из шаров оказывается заряд $q/2$. То, что заряд делится между двумя одинаковыми шарами поровну, действительно следует из соображений симметрии. Но из этого еще не следует, что на каждом из шаров оказывается заряд $q/2$. Это будет так только, если для электрических зарядов выполняется закон сохранения. Так как Кулону, несмотря на его не очень обоснованное предположение, удалось установить основной закон электростатики (1.4), то мы можем рассматривать его опыты одновременно и как первое экспериментальное подтверждение **закона сохранения электрических зарядов**. Последний в настоящее время тщательнейшим образом экспериментально проверен и формулируется следующим образом: *электрический заряд любого изолированного тела или изолированной системы тел со временем не меняется*. Иными словами, изменение заряда тела или системы тел, находящихся в данной области пространства, может происходить только за счет перемещения каких-либо заряженных тел через границу рассматриваемой области.

Все свои опыты Кулон проводил в атмосферном воздухе, в котором взаимодействие точечных зарядов ничтожно мало отличается от их взаимодействия в вакууме. Поэтому формулы (1.4) и (1.5) выражают закон взаимодействия точечных зарядов в вакууме.

Коэффициент пропорциональности k в законе Кулона зависит от выбора единиц измерения сил, расстояний и зарядов. Рассмотрим два основных подхода к такому выбору.

1. В системе CGS расстояние измеряют в сантиметрах, массу в граммах, время в секундах (соответственно единица измерения силы, которую называют дина, равна 10^{-5} Н). А единицу заряда выбирают таким образом, чтобы в формулах (1.4) и (1.5) коэффициент k был равен 1, т. е. чтобы закон Кулона имел наиболее простую форму. Такая единица по-

лучила название *абсолютной электростатической единицы заряда* – это такой заряд, который действует в вакууме на равный ему заряд, удаленный на расстояние 1 см, с силой, равной 1 дине.

2. В Международной системе единиц СИ единицей электрического заряда служит кулон (Кл), который является величиной, производной от основной единицы СИ – ампера (единицы силы тока). Кулон равен заряду (количеству электричества), проходящему через сечение проводника при силе постоянного тока 1 А за время 1 с. Определение единицы силы тока основано на магнитном взаимодействии проводников с постоянным током. Такой выбор единиц, противоречащий логике электродинамики, объясняется возможностями эксперимента: современная техника обеспечивает измерение величины силы тока с существенно большей точностью, чем измерение величины заряда. Как показывает опыт, в СИ

$$k = 8{,}897 \cdot 10^{9}\ {}^{\text{Н}\cdot\text{м}^2}\!/_{\text{Кл}^2} \approx 9 \cdot 10^{9}\ \text{ед. СИ.}$$

В СИ вместо коэффициента k часто используют **электрическую постоянную**

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ {}^{\text{Кл}^2}\!/_{\text{Н}\cdot\text{м}^2}.$$

При этом закон Кулона принимает вид

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Опыт показывает, что *электростатическая* (*кулоновская*) *сила, действующая на* ***точечный заряд*** *со стороны системы* ***точечных зарядов****, равна векторной сумме кулоновских сил, которые действовали бы на этот заряд со стороны каждого из зарядов системы в отсутствии всех остальных зарядов*:

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \cdots + \overrightarrow{F_n}.$$

Иными словами, для сил электростатического взаимодействия точечных зарядов справедлив **принцип суперпозиции**. *Однако для протяженных заряженных тел принцип суперпозиции может не выполняться*!

2. Понятие об электрическом поле. Напряженность электрического поля

Взаимодействие зарядов по закону Кулона является экспериментально установленным фактом. Однако остается открытым вопрос, каким образом осуществляется действие одного заряда на другой. Великий английский физик Фарадей дал факту взаимодействия электрических зарядов следующее объяснение: вокруг каждого электрического заряда всегда существует электрическое поле. ***Электрическое поле*** *– непрерывный в пространстве материальный объект, создаваемый электрическими зарядами и способный действовать на другие электрические заряды.* Согласно этим представлениям взаимодействие зарядов q_1 и q_2 есть результат действия поля заряда q_1 на заряд q_2 и соответственно поля заряда q_2 на заряд q_1. То, что электрическое поле объективно существует, следует из явлений, возникающих при ускоренном движении электрических зарядов, и из существования электромагнитных волн.

Для количественной характеристики электрического поля служит специальная векторная физическая величина – **напряженность электрического поля**.

Рассмотрим точечный электрический заряд величиной q. Согласно представлениям Фарадея, он создает вокруг себя некоторое электрическое поле. Внесём в это электрическое поле другой точечный (пробный) заряд величиной q_0. На пробный заряд q_0 будет действовать сила $\vec{F}$ (различная в разных точках пространства), которая согласно закону Кулона пропорциональна величине пробного заряда. Следовательно, отношение этой силы к величине пробного заряда не зависит от выбора пробного заряда и характеризует электрическое поле, создаваемое зарядом q в той точке, где находится пробный заряд. Вектор $\vec{F}/q_0$ и называют *напряженностью электрического поля $\vec{E}$ точечного заряда q в точке нахождения пробного заряда*.

Рассмотрим теперь два точечных заряда q_1 и q_2. Согласно принципу суперпозиции на пробный точечный заряд q_0, помещенный в произвольную точку *A*, будет действовать сила

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2},$$

где $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$ – силы, действующие на заряд q_0 со стороны зарядов q_1 и q_2 соответственно. По данному только что определению напряженности электрического поля точечного заряда имеем:

$$\overrightarrow{F_1} = q_0\overrightarrow{E_1}, \quad \overrightarrow{F_2} = q_0\overrightarrow{E_2}.$$

Здесь $\overrightarrow{E_1}$ – напряженность поля в точке *A*, создаваемая зарядом q_1 (когда q_2 нет вовсе), а $\overrightarrow{E_2}$ – напряженность поля в точке *A*, создаваемая зарядом q_2 (когда нет заряда q_1). Таким образом,

$$\vec{F} = q_0\,(\overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2}).$$

Следовательно, вектор $\vec{E} = \vec{F}/q_0$ не зависит от величины пробного заряда и характеризует электрическое поле, создаваемое в точке A двумя закрепленными точечными зарядами q_1 и q_2, причём

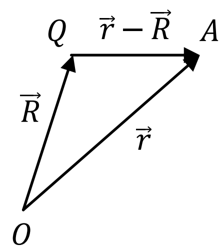
$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}.$$

Аналогично можно показать, что для электрического поля, создаваемого любым числом N точечных зарядов, отношение силы $\vec{F}$, с которой электрическое поле действует на пробный точечный заряд q, к значению этого заряда, не зависит от выбора пробного заряда. Эта величина $\vec{E} = \vec{F}/q$ *называется напряженностью электрического поля системы точечных зарядов*. Причем

$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} + \cdots + \vec{E_N},$$

где $\vec{E_i}$ (i = 1, …, N) – напряженность электрического поля, создаваемого зарядом q_i в отсутствии всех остальных зарядов. Иными словами, *напряженности электрических полей точечных зарядов также подчиняются* ***принципу суперпозиции***.

Из сказанного выше следует, что если известна напряженность электрического поля, создаваемого в какой-либо точке системой точечных зарядов, то тем самым определена и сила, действующая на электрический заряд q, помещенный в эту точку. А именно



$$\vec{F} = q\,\vec{E}.$$

Как следует из определения, *направление вектора напряженности электрического поля в точке A совпадает с направлением вектора кулоновской силы, действующей на положительный пробный заряд, помещенный в эту точку*.

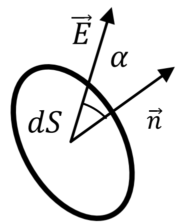
В силу данного выше определения и закона Кулона (1.5) напряженность электрического поля, создаваемого в точке A с радиус-вектором $\vec{r}$ точечным зарядом Q, помещенным в точку с радиус-вектором $\vec{R}$ в системе СИ определяется формулой:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\left|\vec{r} - \vec{R}\right|^3}(\vec{r} - \vec{R}). \qquad (2.1)$$

3. Теорема Гаусса для электрического поля

Введем скалярную величину $d\Phi$ — ее называют **элементарным потоком вектора напряженности электрического поля** через некоторую элементарную (маленькую, плоскую) ориентированную (т. е. с выбранным единичным вектором нормали $\vec{n}$) площадку:

$$d\Phi = EdS\cos\alpha = \left(\vec{E}, d\vec{S}\right), \tag{3.1}$$



где $\vec{E}$ – напряженность электрического поля в месте нахождения выбранной площадки, α – угол между вектором $\vec{E}$ и вектором $\vec{n}$ нормали к площадке (т. к. площадка маленькая и плоская, то вектор $\vec{E}$ и угол α можно считать одинаковыми в разных её точках), dS – площадь площадки, $d\vec{S} = dS\vec{n}$.

Потоком Φ вектора напряженности электрического поля через произвольную ориентируемую поверхность называется алгебраическая сумма потоков через элементарные площадки, образующие эту поверхность. При этом *направления нормалей к разным элементарным площадкам данной поверхности должны быть согласованы*: *если представить данную поверхность как двухсторонний лист бумаги, то все нормали должны начинаться на одной и той же стороне этой бумаги и не пересекать её.* Такое согласование нормалей может быть осуществлено не для любой поверхности. Наиболее простой и известный пример не ориентируемой поверхности, для которой это сделать нельзя – так называемый лист Мёбиуса. В дальнейшем мы будем рассматривать только ориентируемые поверхности (по умолчанию). Заметим также, что в *случае замкнутой поверхности в качестве нормалей всегда выбираются внешние нормали*.

Рассмотрим простое, но важное свойство величины элементарного потока $d\Phi$. Запишем формулу (3.1) в виде

$$d\Phi = (E\cos\alpha)dS = E_n dS,$$

где E_n — проекция вектора $\vec{E}$ на направление нормали $\vec{n}$. Если поле создается k зарядами, то по принципу суперпозиции

$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} + \cdots + \vec{E_k}.$$

Но проекция суммы векторов равна сумме проекций этих векторов:

$$E_n = E_{1n} + E_{2n} + \cdots + E_{kn}.$$

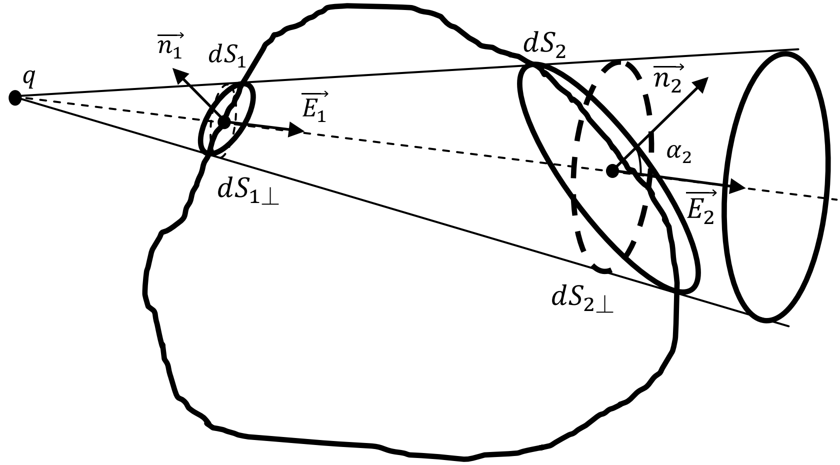
Умножая последнее равенство на dS, получим, что элементарный поток вектора напряженности равен сумме элементарных потоков, создаваемых отдельными зарядами:

$$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 + \cdots + d\Phi_k.$$

Поскольку это справедливо для любой элементарной площадки, то, следовательно, выполняется и для любой поверхности:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_k. \tag{3.2}$$

Покажем теперь, что *поток напряженности электрического поля точечного заряда q, находящегося вне произвольной замкнутой поверхности S, через эту поверхность равен нулю*.



Построим очень узкий конус с вершиной в месте нахождения заряда q, пересекающий поверхность S, и найдем элементарные потоки через два очень маленьких (и поэтому практически плоских) участка поверхности, отсекаемых этим конусом на поверхности S:

$$d\Phi^{(1)} = E_1 dS_1 \cos\alpha_1 = -E_1 dS_{1\perp},$$

$$d\Phi^{(2)} = E_2 dS_2 \cos\alpha_2 = E_2 dS_{2\perp},$$

где $E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_1^2}$, $E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_2^2}$, и учтено, что в нашем случае угол α_1 тупой (на рисунке не указан). В общем случае из двух углов α_1 и α_2 один всегда будет острым, а другой тупым, т. к. в силу замкнутости поверхности S ось конуса должна войти и выйти из области, ограниченной поверхностью S одинаковое число раз. Из подобия следует, что площади сечений конуса, перпендикулярных его оси и расположенных на расстояниях r_1 и r_2 от его вершины, связаны соотношением:

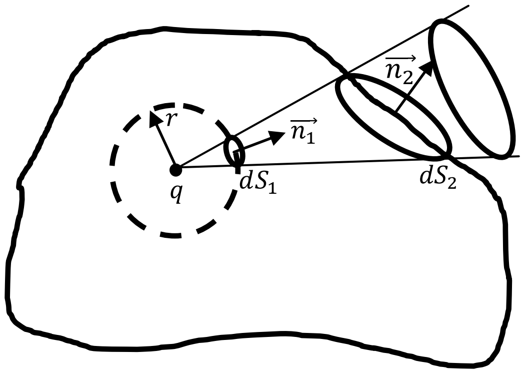
$$\frac{dS_{1\perp}}{dS_{2\perp}} = \frac{r_1^2}{r_2^2},$$

причём форма этих сечений может быть любой. Следовательно,

$$\frac{d\Phi^{(1)}}{d\Phi^{(2)}} = -\frac{r_2^2}{r_1^2}\,\frac{r_1^2}{r_2^2} = -1 \quad \text{или} \quad d\Phi^{(1)} + d\Phi^{(2)} = 0.$$

Пронизывая весь ограниченный поверхностью S объём системой узких конусов, мы разобьём всю поверхность S на пары участков с нулевым суммарным потоком. Итак, доказано, что поток напряженности электрического поля точечного заряда q, находящегося вне произвольной замкнутой поверхности, через эту поверхность равен нулю.

Вычислим теперь поток вектора напряженности электрического поля, создаваемого точечным зарядом q, находящимся внутри произвольной замкнутой поверхности S_2, через эту поверхность. Окружим заряд q сферической поверхностью S_1, центр которой находится в месте расположения заряда. Радиус сферы r выберем таким, чтобы сфера S_1 полностью находилась внутри поверхности S_2. Рассуждая аналогично предыдущему, получим, что в этом случае потоки $d\Phi^{(1)}$ и $d\Phi^{(2)}$ напряженности электрического поля, создаваемого зарядом q, соответственно через элементарные площадки сферы dS_1 и поверхности dS_2 равны между собой (см. рисунок). Поэтому поток через поверхность S_2 равен потоку через сферу S_1. А поток напряженности электрического поля заряда q через сферу S_1, очевидно, равен:



$$\Phi^{(1)} = \sum_{\text{по } S_1} E dS_1 = E \sum_{\text{по } S_1} dS_1 = ES_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

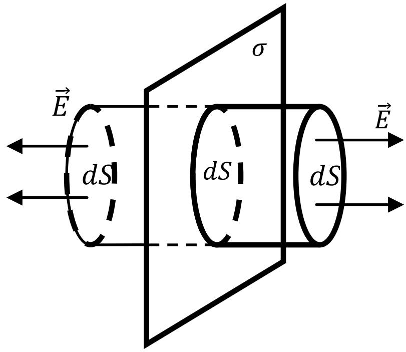
Учитывая, что в силу (3.2) потоки векторов напряженности электрических полей, создаваемых различными зарядами алгебраически складываются, приходим к окончательной формулировке **теоремы Гаусса**: *поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен полному заряду, заключённому внутри этой поверхности, деленному на электрическую постоянную*, т. е.

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{\text{внутр}}.$$

4. Напряженности электрических полей равномерно заряженной плоскости, сферы и шара

Пусть некоторое пространственное преобразование (поворот относительно оси, параллельный перенос или симметрия относительно плоскости) не меняет распределение заряда в пространстве. Тогда из принципа суперпозиции для напряженности электрического поля системы точечных зарядов и формулы (2.1) для напряженности электрического поля точечного заряда непосредственно следует, что это пространственное преобразование не меняет и напряженность электростатического поля во всех точках пространства. Это позволяет вычислять напряженность электрического поля, создаваемого заряженным телом с существенной симметрией в распределении заряда, используя теорему Гаусса.

Применим, например, теорему Гаусса для расчета напряженности электрического поля *равномерно заряженной плоскости*, т. е. плоскости, любой участок которой имеет заряд $Q = \sigma S$, где S – площадь участка, а σ – так называемая **поверхностная плотность заряда** данной плоскости.



Из симметрии распределения заряда относительно плоскостей перпендикулярных заряженной плоскости следует, что вектор $\vec{E}$ всюду перпендикулярен заряженной плоскости. Выберем замкнутую поверхность в виде узкого цилиндра, расположенного симметрично относительно плоскости. Поток вектора напряженности электрического поля через боковую поверхность цилиндра, очевидно, равен нулю. Кроме того, из симметрии распределения заряда относительно заряженной плоскости следует, что потоки вектора напряженности через оба основания цилиндра площадью dS равны между собой и составляют $E_n dS$, т. е. полный поток равен

$$\Phi = 2E_n dS,$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор, перпендикулярный заряженной плоскости и направленный от неё. Но по теореме Гаусса поток Φ через поверхность цилиндра связан с зарядом $dQ = \sigma dS$ внутри цилиндра

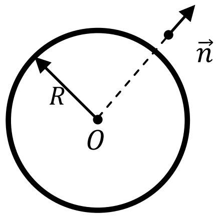
$$\Phi = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0}.$$

Сравнивая последние две формулы для потока вектора напряженности электрического поля, получим:

$$E_n = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \qquad (4.1)$$

Таким образом, *вектор напряженности электрического поля, создаваемого равномерно заряженной плоскостью, направлен перпендикулярно плоскости от неё, если заряд плоскости положителен, и к ней, если заряд плоскости отрицателен. При этом величина напряженности электрического поля одинакова во всех точках пространства, кроме точек самой плоскости, где она не определена*.

На самом деле бесконечных равномерно заряженных плоскостей не существует. Однако можно показать, что *напряженность электрического поля равномерно заряженной пластины конечных размеров мало отличается от* (4.1) *в точках, расположенных вблизи пластины далеко от её краёв*, т. е. если $h \ll r$, где h – расстояние от данной точки до пластины, а r – минимальное расстояние от данной точки до края пластины.



Найдем теперь напряженность электрического поля, создаваемого сферой радиуса R, равномерно заряженной зарядом Q. Из симметрии распределения заряда относительно плоскостей, проходящих через центр сферы, следует, что вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ всюду направлен вдоль радиуса. Кроме того, из симметрии поворота относительно точки O следует, что E_n зависит только от расстояния до центра сферы. Здесь $\vec{n}$ – единичный вектор, сонаправленный в каждой точке её радиус-вектору, взятому относительно точки O. Построим сферу радиуса r с центром в точке O. Поток вектора напряженности через эту сферу будет равен:

$$\Phi = E_n S = 4\pi r^2 E_n(r).$$

С другой стороны, по теореме Гаусса:

$$\Phi = \begin{cases} 0, & r < R, \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0}, & r > R. \end{cases}$$

Из сравнения последних двух формул для потока вектора напряженности электрического поля имеем:

$$E_n(r) = \begin{cases} 0, & r < R, \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r > R. \end{cases}$$

Таким образом, *напряженность электрического поля сферы, равномерно заряженной зарядом Q, внутри самой сферы равна нулю, а вне сферы совпадает с напряженностью электрического поля точечного заряда Q, помещенного в её центр*.

Найдём теперь напряженность электрического поля шара радиуса R с центром в точке O, равномерно заряженного зарядом Q. В этом случае (как и для равномерно заряженной сферы) распределение зарядов, создающих поле, обладает сферической симметрией. Поэтому такой же симметрией обладает и поле: вектор напряженности электрического поля в каждой точке направлен коллинеарно радиус – вектору этой точки, взятому относительно точки O, а модуль напряженности одинаков во всех точках, равноудаленных от центра шара. Поэтому поток Φ вектора напряженности через сферическую поверхность радиуса r с центром в точке O будет по-прежнему равен произведению $E_n(r)$ на площадь поверхности сферы:

$$\Phi = E_n(r)4\pi r^2.$$

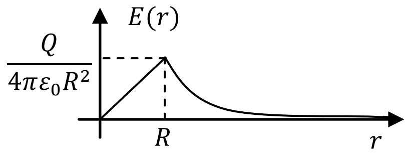
С другой стороны, по теореме Гаусса

$$\Phi = \begin{cases} \dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{\varepsilon_0}, & r \le R; \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0}, & r \ge R. \end{cases}$$

где $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ – объемная плотность заряда в шаре. Сравнивая два последних соотношения, получим

$$E_n(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} r \equiv \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}, & r \le R; \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r \ge R. \end{cases}$$

Итак, *электрическое поле шара, равномерно заряженного зарядом Q, вне шара совпадает с полем точечного заряда Q, помещенного в центр шара*. Это же утверждение справедливо для тела с любым сферически симметричным распределением заряда.



5. Силовые линии электрического поля

Чтобы описать электрическое поле, надо задать вектор напряженности этого поля в каждой точке пространства. До сих пор мы делали это аналитически. Однако представить электрическое поле можно и графически. Для этого пользуются **силовыми линиями.**

Определение. Силовой линией или линией напряженности электрического поля называется *направленная* линия, касательная к которой в каждой точке направлена вдоль вектора напряженности $\vec{E}$.

Замечание. Касательная, как и всякая прямая, определяет два взаимно противоположных направления. Поэтому силовой линии приписывают определенное направление (связанное с направлением вектора $\vec{E}$) и отмечают его на чертеже стрелкой.

Чтобы при помощи силовых линий изображать не только направление, но и **величину** напряженности поля, условились проводить силовые линии, соблюдая **«правило густоты»**. То есть так, чтобы *число силовых линий, проходящих через единицу поверхности, перпендикулярной к силовым линиям, было пропорционально величине напряженности поля в данном месте*. Но тогда число силовых линий, проходящих через любую замкнутую поверхность, будет пропорционально потоку Φ вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ через эту поверхность, и, следовательно (по теореме Гаусса) полному заряду, заключенному внутри этой поверхности. Отсюда следуют наиболее важные свойства силовых линий электростатического поля:

1) силовые линии электростатического поля **можно** проводить, соблюдая «правило густоты» и не обрывая их при этом в пространстве между зарядами;

2) силовые линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных; на каждом заряде начинается (или заканчивается) число линий, пропорциональное его величине.

Подчеркнем, что если бы в законе Кулона была хотя бы немного другая зависимость силы взаимодействия точечных зарядов от расстояния между ними, то теорема Гаусса была бы несправедлива, и провести силовые линии непрерывно, соблюдая при этом «правило густоты», было бы невозможно.

6. Работа сил электростатического поля. Потенциал

Поле *неподвижного* точечного заряда является центральным и стационарным. Как известно из механики, любое центральное стационарное силовое поле является потенциальным. То есть при перемещении точечного заряда q_0 в поле другого неподвижного точечного заряда из одной точки в другую, работа сил электростатического поля не зависит от формы траектории. Если точечный заряд q_0 перемещается в поле нескольких неподвижных точечных зарядов $q_1, q_2, \dots, q_N$, то по принципу суперпозиции на него действует сила:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i,$$

где $\vec{F}_i$ – сила, действующая на заряд q_0 со стороны заряда q_i (i = 1, 2, …, N) в отсутствии других зарядов. Но работа результирующей силы равна сумме работ составляющих её сил:

$$A_{1\to 2} = \sum_{i=1}^{N} A_{i,1\to 2}, \qquad (6.1)$$

где $A_{i,1\to 2}$ – работа силы $\vec{F}_i$ при перемещении заряда q_0 из точки 1 в точку 2. В силу потенциальности поля точечного заряда, она не зависит от формы траектории, и, значит, работа $A_{1\to 2}$ также не зависит от формы траектории. Поскольку любое фиксированное распределение заряда можно рассматривать как систему неподвижных точечных зарядов, то из равенства (6.1) следует, что электрическое поле, создаваемое любым фиксированным распределением заряда, является потенциальным. Этот факт позволяет ввести понятие разности потенциалов электростатического поля.

Определение. *Разностью потенциалов электростатического поля* $\varphi_1 - \varphi_2$ между точками 1 и 2 называется отношение работы, совершаемой *силами электростатического поля* при перемещении пробного точечного заряда q_0 из точки 1 в точку 2, к величине этого заряда:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{1\to 2}^{(q_0)}}{q_0}.$$

При этом существенно, что правая часть последнего неравенства не зависит от величины заряда q_0. Действительно, если из точки 1 в точку 2 по одинаковой траектории перемещаются пробные заряды q_1 и q_2, то в каждой точке действующие на них электростатические силы будут отличаться в q_1/q_2 раз. Поэтому и работы сил поля будут отличаться в это же число раз:

$$\frac{A_{1\to 2}^{(q_1)}}{A_{1\to 2}^{(q_2)}} = \frac{q_1}{q_2} \Leftrightarrow \frac{A_{1\to 2}^{(q_1)}}{q_1} = \frac{A_{1\to 2}^{(q_2)}}{q_2}.$$

Итак, *разность потенциалов является характеристикой самого электростатического поля и не зависит от величины пробного заряда, который в этом поле перемещается*!

Из формулы (6.1) следует, что если электростатическое поле создается системой N неподвижных зарядов, то его *разность потенциалов удовлетворяет принципу суперпозиции*:

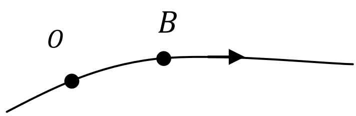
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{q_0} A_{1\to 2}^{(q_0)} = \frac{1}{q_0} \sum_{i=1}^{N} A_{i,1\to 2}^{(q_0)} = \sum_{i=1}^{N} \left(\varphi_1^{(i)} - \varphi_2^{(i)}\right),$$

где $\varphi_1^{(i)} - \varphi_2^{(i)}$ – разность потенциалов между точками 1 и 2 поля, создаваемого зарядом q_i.

Поскольку однозначно определена только разность потенциалов силового поля между двумя точками пространства, то потенциал в какой-либо одной точке *O* можно считать равным любой величине φ_0 (например, $\varphi_0 = 0$). Тогда значения потенциалов во всех остальных точках определяются однозначно:

$$\varphi_{\text{в}} = \varphi_0 + \frac{1}{q} A_{\text{в}\to 0}^{(q)} = \varphi_0 - \frac{1}{q} A_{0\to\text{в}}^{(q)}.$$

Заметим, что как видно из последней формулы, при перемещении в направлении силовой линии потенциал уменьшается.



За нулевой потенциал часто удобно принимать потенциал бесконечно удаленной точки пространства. На практике обычно принимают потенциал Земли равным нулю.

Из определения разности потенциалов следует, что

$$A_{1\to 2}^{(q)} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{6.2}$$

С другой стороны, если поле сил консервативное, то его работу при перемещении некоторой частицы можно представить как разность потенциальных энергий частицы в начале и конце траектории:

$$A_{1\to 2}^{(q)} = W_1 - W_2$$

Сравнивая последние два соотношения, получаем, что, если положить равной нулю потенциальную энергию частицы в электростатическом поле в точке с нулевым потенциалом, то потенциальная энергия W точечного заряда q в любой точке будет равна произведению величины заряда на потенциал электростатического поля φ в этой точке:

$$W = q\varphi. \tag{6.3}$$

В международной системе единиц СИ единицей потенциала служит **вольт** (В). 1 Вольт — это разность потенциалов между двумя точками электростатического поля, при перемещении между которыми заряда в 1 Кл поле совершает работу, равную 1 Дж: 1 В =1 Дж/(1 Кл).

Заметим, что единицей измерения напряженности электрического поля в СИ является 1 В/м. Действительно, по определению

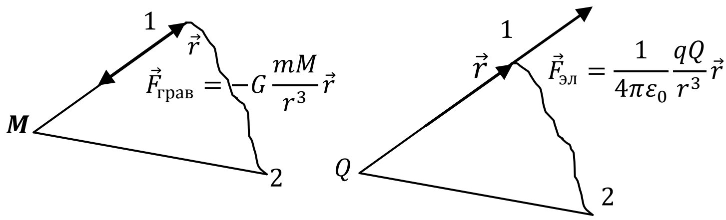
$$[\vec{E}] = \left[\frac{\vec{F}}{q}\right] = \frac{1\text{ Н}}{1\text{ Кл}} = \frac{1\text{ Н }1\text{м}}{1\text{ Кл }1\text{ м}} = \frac{1\text{ Дж}}{1\text{ Кл }1\text{ м}} = \frac{1\text{ Дж}}{1\text{ Кл }1\text{ м}} = \frac{1\text{ В}}{1\text{ м}} = 1\,\frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Определение. Поверхность, во всех точках которой потенциал электростатического поля имеет одинаковые значения, называется *эквипотенциальной поверхностью*.

Между любыми двумя точками эквипотенциальной поверхности разность потенциалов равна нулю, поэтому работа сил электрического поля при любом перемещении заряда по эквипотенциальной поверхности равна нулю. Это означает, что вектор силы $\vec{F}$ (и, следовательно, вектор напряженности $\vec{E}$) в любой точке любой траектории, лежащей на эквипотенциальной поверхности, перпендикулярен вектору перемещения. Но это возможно только, если линии напряженности электростатического поля перпендикулярны эквипотенциальной поверхности. При этом, как и всегда (см. выше), вектор напряженности электрического поля направлен в сторону уменьшения потенциала.

Очевидно, что эквипотенциальными поверхностями поля точечного заряда являются сферы, в центре которых расположен заряд.

Найдем потенциал точечного заряда. Для этого воспользуемся тем, что силы гравитационного взаимодействия двух точечных масс и электростатического взаимодействия двух точечных зарядов одинаково зависят от расстояния между частицами (см. рисунок).



Как известно из механики, работа гравитационных сил при перемещении точечной массы m в поле неподвижной массы M с расстояния r_1 на расстояние r_2 равна:

$$A_{1\to 2}^{(\text{грав})} = -GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Поэтому, пользуясь указанной аналогией, получим, что работа электростатических сил при перемещении точечного заряда q в поле неподвижного заряда Q с расстояния r_1 на расстояние r_2 равна:

$$A_{1\to 2}^{(\text{эл})} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Qq \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \quad (6.4)$$

Сопоставляя (6.2) – (6.4), сразу получаем, что

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_1, \qquad W^{(\text{эл})}(r) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2,$$

где значения констант C_1 и $C_2 = qC_1$ зависят от выбора положения нулевой точки (точки с нулевым потенциалом и нулевой потенциальной энергией). Напомним, что в случае гравитационного взаимодействия $W^{(\text{грав})}(r) = -\frac{GmM}{r} + C$. Единственное принципиальное отличие в формулах для $W^{(\text{эл})}$ и $W^{(\text{грав})}$ заключается в знаках. Оно объясняется тем, что две точечные массы (два «одноименных гравитационных заряда») притягиваются, в то время как два одноименных электрических заряда отталкиваются.

Заметим, что, как и в случае гравитационного поля, если перемещаются оба заряда q и Q, то величину $W^{(\text{эл})}$ следует рассматривать как энергию их взаимодействия.

7. Проводники в электростатическом поле. Опыты Кавендиша

Важное замечание. Как известно, все тела состоят из атомов, молекул или ионов, в состав которых входят положительно заряженные ядра и отрицательно заряженные электроны. Кроме того, в телах могут находиться и так называемые свободные электроны, оторвавшиеся по различным причинам от своих атомов и блуждающие по всему телу или его части. Поэтому в 1 грамме любого в целом нейтрального вещества, присутствует огромный положительный и такой же огромный отрицательный заряды (примерно по 10^5 Кл каждый). Естественно, что эти заряды создают сильно неоднородное электрическое поле. Кроме того, из-за хаотического теплового движения атомов, молекул, ионов и электронов это электрическое поле достаточно быстро и хаотически изменяется со временем. Однако с точки зрения объяснения явлений, возникающих при взаимодействии тел с внешними постоянными полями и протекании постоянных токов, важно не это микроскопическое электрическое поле и не микроскопическое распределение заряда в веществе. В этих случаях оказывается, что вполне достаточно использовать так называемые **макроскопическое поле** и **макроскопический заряд**, которые представляют собой микроскопическое поле и микроскопический заряд, усредненные по некоторому макроскопическому объему или (и) на некотором макроскопическом интервале времени. Причем, учитывая хаотичность теплового движения, можно доказать, что усреднение по времени и усреднение по объёму дают одинаковые результаты. При этом, как и в термодинамике, объем считается макроскопическим, если содержит достаточно большое число структурных элементов вещества (например, 10^6 атомов или молекул, т.е. 10^{-17} моля исследуемого вещества). Аналогично время может считаться макроскопическим, если оно много больше времени установления равновесия в данном веществе. ***Везде далее в этом пособии под электрическим полем в веществе всегда будет подразумеваться именно макроскопическое электрическое поле, а под зарядом, находящимся в некотором макроскопическом объеме вещества, – его макроскопический заряд.***

Проводниками называются такие тела, в которых в большом количестве имеются свободные носители электрических зарядов.

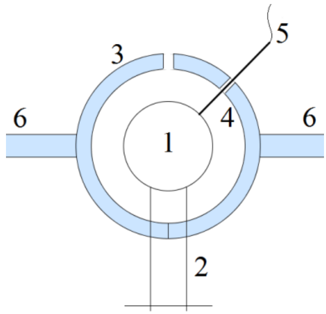
Примерами проводников являются металлические тела в твердом и жидком состоянии.

Необходимым условием *электростатического равновесия однородного неподвижного в инерциальной системе отсчёта проводника* (т. е отсутствия упорядоченного движения заряда внутри него) является равенство нулю напряженности электрического поля внутри проводника. Если бы внутри проводника существовало макроскопическое электрическое поле $\vec{E}$, то свободные заряды (в металлах – электроны) пришли бы в движение, т. е. равновесие было бы нарушено. Условие $\vec{E} = \vec{0}$ должно быть выполнено для всех точек внутри проводника независимо от того, заряжен он сам или помещен во внешнее электростатическое поле.

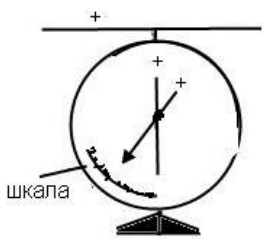
Заметим, что в проводнике, движущемся ускоренно или вращающемся, а также в области его неоднородности (по числу или типу свободных носителей заряда, температуре и т.п.) электрическое поле внутри проводника при его электростатическом равновесии существует, но опять же оно обеспечивает отсутствие упорядоченного движения свободных носителей заряда относительно проводника. Подробнее некоторые из этих случаев будут рассмотрены при изучении постоянного тока, а пока мы будем считать проводники неподвижными и однородными.

Условие отсутствия электростатического поля внутри проводника приводит к тому, что не скомпенсированные заряды могут располагаться только на его поверхности. Действительно, рассмотрим произвольную замкнутую поверхность, ограничивающую некоторый макроскопический объем внутри проводника. Во всех её точках напряженность макроскопического электрического поля равна нулю. Следовательно, равен нулю и поток напряженности поля через эту поверхность. Тогда по теореме Гаусса равен нулю и полный заряд в объеме, ограниченном рассматриваемой поверхностью. Так как поверхность произвольна, то результат применим к любой области внутри проводника вплоть до его границы. Итак, *в равновесном состоянии не скомпенсированные заряды могут располагаться только на поверхности неподвижного однородного проводника.*

Заметим, что отсутствие не скомпенсированных зарядов во внутренних частях проводника может быть использовано для опытной проверки закона Кулона: если бы в законе Кулона стояло не $\frac{1}{r^2}$, а $\frac{1}{r^{2+\varepsilon}}$, то не была бы справедлива теорема Гаусса и во внутренних частях заряженного проводника, могли бы находиться не скомпенсированные заряды. Такую косвенную проверку закона Кулона можно провести с намного большей точностью, чем при непосредственном измерении силы взаимодействия точечных зарядов, т. к. в последнем случае очень трудно обеспечить достаточно высокую степень их точечности.



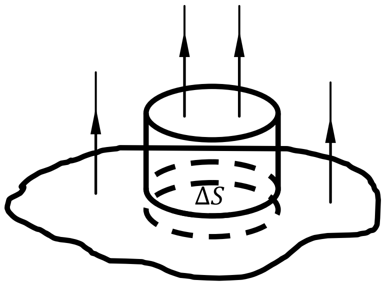
Возможно, именно поэтому отсутствие зарядов во внутренних частях заряженного металлического проводника было впервые экспериментально установлено Кавендишем за 12 лет до того, как Кулон сформулировал закон взаимодействия точечных зарядов. Однако тогда еще не была установлена связь этого факта с обратно квадратичной зависимостью силы взаимодействия точечных зарядов от расстояния между ними. В опытах Кавендиша металлический шар 1 был установлен на изолирующей подставке 2. Две металлические полусферы 3, изолированные от земли стеклянными стержнями 6, были укреплены на подвижных подставках (на рисунке не изображены) и могли быть соединены в одну сферу, охватывающую шар 1. В одной из полусфер имелось маленькое отверстие, в которое можно было вставлять короткую металлическую проволоку 4, подвешенную на шелковой нити 5, и соединять шар и сферу, не разряжая прибора. Опыт заключался в следующем. Полусферы складывали вместе, соединяли их проволокой 4 с шаром 1 и заряжали. О наличии заряда на сферы судили по показаниям электрометра. Затем проволоку 4 с помощью шелковой нити 5 удаляли, обе полусферы



простейший электрометр

раздвигали и разряжали, соединяя их с землей. После этого электрометр соединяли с шаром 1 и проверяли, имеется ли на шаре заряд. Опыт всегда показывал, что на шаре нет никаких следов заряда.

Из-за большого принципиального значения вопроса о виде закона силового взаимодействия точечных зарядов подобные опыты были повторены позднее Максвеллом. Исходя из чувствительности своих опытов, Максвелл рассчитал, что если в законе Кулона $F \sim r^{-2+\varepsilon}$, то $|\varepsilon| < 5{\cdot}10^{-5}$. В настоящее время экспериментально установлено, что $|\varepsilon| < 6{\cdot}10^{-16}$.



С помощью теоремы Гаусса легко найти формулу для напряженности электрического поля в непосредственной близости от поверхности проводника. Прежде всего, отметим, что поскольку в толще однородного неподвижного проводника макроскопическое электрическое поле равно нулю, то во всех точках такого проводника потенциал одинаков, его граница является эквипотенциальной поверхностью, и линии напряженности перпендикулярны ей. Возьмем на поверхности проводника настолько маленький участок ΔS, чтобы его можно было считать плоским и равномерно заряженным с поверхностной плотностью заряда σ. Проведем мысленно малую замкнутую цилиндрическую поверхность, образующие которой перпендикулярны к поверхности проводника, а основания параллельны ΔS. Нижнее основание расположено целиком внутри проводника, где поле отсутствует, а верхнее – в непосредственной близости от поверхности, где силовые линии еще перпендикулярны к ней. При таком выборе замкнутой поверхности поток напряженности электрического поля Φ отличен от нуля только через верхнее основание и равен $E_n \Delta S$, где $E_n = (\vec{E}, \vec{n})$, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности проводника. С другой стороны, по теореме Гаусса:

$$E_n \Delta S = \Phi = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}.$$

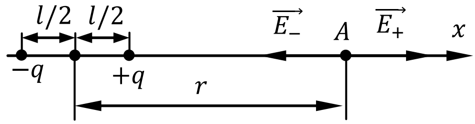
Откуда, учитывая, что вектор $\vec{E}$ перпендикулярен поверхности, имеем:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}.$$

Подчеркнем, что полученная формула дает выражение для *напряженности полного, существующего вблизи поверхности проводника, электростатического поля независимо от того, создается ли это поле* *только заряженным проводником или еще и другими зарядами*. Видно, что напряженность полного поля вблизи поверхности проводника однозначно связана с плотностью зарядов на его поверхности.

8. Электрический диполь

В основном нас окружают электрически нейтральные тела. Рассмотрим простейший пример электрически нейтральной системы – **электрический диполь**. Так называют систему, состоящую из двух равных по модулю, но противоположных по знаку точечных электрических зарядов $+q$ и $-q$, находящихся на некотором расстоянии l друг от друга.

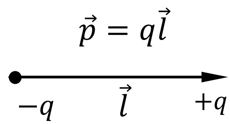


Электрическое поле диполя можно найти в любой точке, пользуясь принципом суперпозиции. Сделаем это, например, для точки A, лежащей на оси диполя. Напряженность поля в этой точке равна векторной сумме напряженностей, создаваемых точечными зарядами $+q$ и $-q$:

$$E_x = E_+ - E_- = \frac{kq}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{kq}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} = \frac{2kqlr}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2},$$

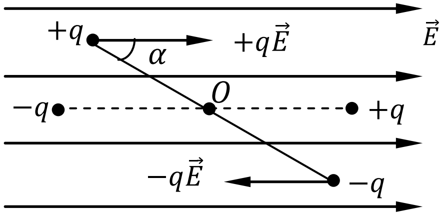
где r – расстояние от середины диполя до точки A, $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. На больших расстояниях (при $r \gg l$):

$$E_x = \frac{2kql}{r^3} = k\frac{2p}{r^3}.$$



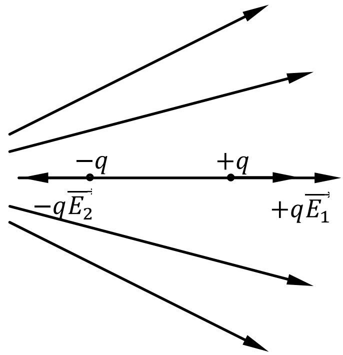
Здесь $p = ql$ – модуль вектора электрического дипольного момента $\vec{p}$, а направлен этот вектор от отрицательного заряда к положительному. Как видно из полученного выражения, вдали от диполя напряженность поля убывает с расстоянием как $\frac{1}{r^3}$, т. е. быстрее, чем поле точечного заряда, пропорциональное $\frac{1}{r^2}$. Оказывается, что это справедливо не только для точек, лежащих на оси диполя, но и для любых других точек, достаточно удаленных от диполя.

Исследуем теперь поведение диполя во внешнем электрическом поле. Рассмотрим сначала случай *однородного* внешнего поля с напряженностью $\vec{E}$. На заряды диполя в таком поле действуют равные по модулю, но противоположные по направлению силы $+q\vec{E}$ и $-q\vec{E}$, которые стремятся развернуть диполь. Относительно оси, проходящей через центр диполя (точка O) и перпендикулярной плоскости чертежа, каждая сила создает вращающий момент, равный произведению модуля силы на соответствующее плечо. Суммарный момент, очевидно, будет равен



$$M = 2qE\frac{l}{2}\sin\alpha = qlE\sin\alpha = pE\sin\alpha.$$

Под действием вращающего момента диполь будет поворачиваться, пока не займет устойчивое положение равновесия, изображенное на рисунке штриховой линией. При этом вектор электрического момента диполя сонаправлен с вектором напряженности внешнего поля, т. е. *в однородном электрическом поле диполь поворачивается и располагается так, чтобы его дипольный момент был ориентирован по полю.*



Пусть теперь дипольный момент находится в неоднородном внешнем поле. Разумеется, и здесь возникает вращающий момент, разворачивающий диполь вдоль поля. Но в этом случае на заряды действуют не равные по модулю силы, поэтому после разворота по полю диполь будет втягиваться в область более сильного поля (т. к. $|\vec{E_2}| > |\vec{E_1}|$).

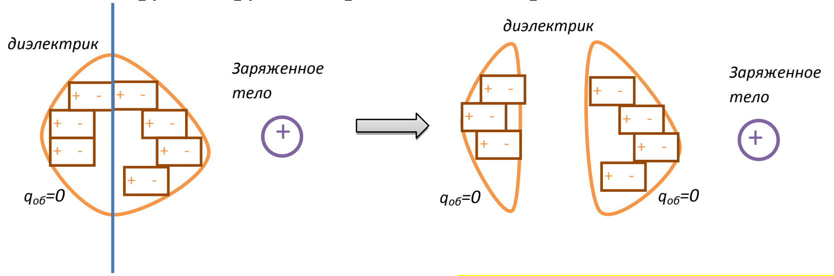
9. Поляризация диэлектриков в электрическом поле

Определение. Диэлектриками называют материалы, в которых нет свободных электрических зарядов. К диэлектрикам относятся стекло, сухое дерево, слюда, шелк, парафин и т. п.

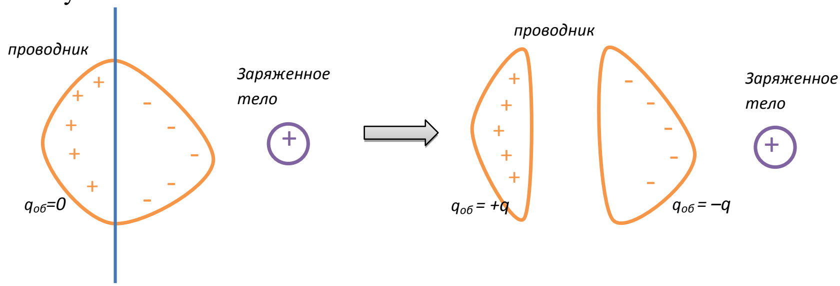
Если к заряженному телу поднести незаряженный легкий предмет из диэлектрика (например, листок бумаги), то он будет притягиваться к заряженному телу.

Это указывает на то, что на первоначально не заряженных диэлектриках в электрическом поле возникают электрические заряды. Так как диэлектрик в целом остается нейтральным (в силу закона сохранения заряда), то на нём появляются электрические полюсы – положительно и отрицательно заряженные области. В силу этого и само это явление получило название **поляризации диэлектриков**. Заряды, возникающие на диэлектриках в электрическом поле, мы будем называть **поляризационными зарядами**.

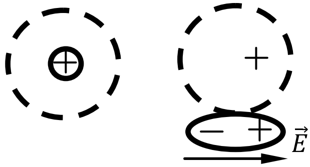
Явление поляризации диэлектриков имеет сходство с явлением индукции (появлением индукционных зарядов) в проводниках. Однако между этими явлениями имеется и важное различие. Разделяя в электрическом поле проводник на части, можно отделить друг от друга индукционные заряды, и поэтому после исчезновения электрического поля, заряженные части проводника остаются заряженными. Разделив же в электрическом поле диэлектрик, мы обнаружим, что после устранения поля каждая часть диэлектрика остаётся по-прежнему незаряженной. ***Отделить друг от друга поляризационные заряды невозможно***.



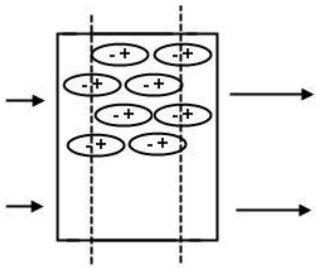
Это различие объясняется тем, что в проводниках часть зарядов существует в подвижном состоянии. Например, в металлах – в виде свободных электронов, которые могут перемещаться на значительные расстояния. Поэтому индукционные заряды в проводниках можно отделить друг от друга. В диэлектриках же заряды обоих знаков связаны друг с другом и могут только смещаться на малые расстояния в пределах одной молекулы.



В различных диэлектриках поляризация происходит по-разному. Многие диэлектрики состоят из неполярных атомов или молекул (например, аргон Ar и азот N_2 соответственно). В них внутримолекулярные заряды расположены симметрично, так что центр положительно заряженного ядра совпадает с центром электрического заряда электронной оболочки. Во внешнем электрическом поле центр оболочки смещается относительно положительно заряженного ядра, т. к. силы, действующие на ядро и на электронную оболочку со стороны внешнего поля, противоположно направлены.

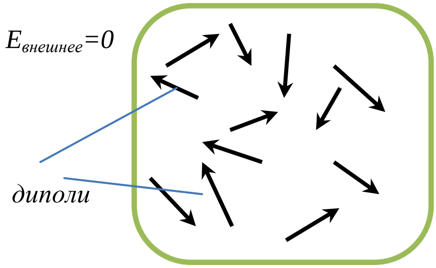


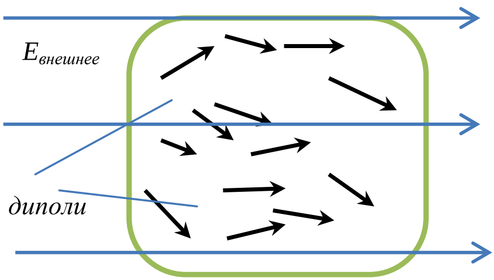
В результате смещения центра отрицательного заряда относительно центра положительного заряда атом становится диполем, и, следовательно, приобретает определенный электрический дипольный момент: $\vec{p} = q\vec{l}$. Здесь, как и прежде, вектор смещения $\vec{l}$ считается направленным от отрицательного заряда к положительному. Очевидно, что $|\vec{l}|$, и, следовательно, $|\vec{p}|$ будут тем больше, чем больше $|\vec{E}|$. Причём эти индицированные внешним электрическим полем диполи расположены вдоль его линий напряженности, и у всех таких диполей отрицательно заряженные концы обращены к той поверхности, в которую эти линии напряженности входят. В результате на поверхностях образца остаются не скомпенсированными заряды концов крайних диполей. Они и образуют поляризационные заряды, создающие электрическое поле, которое уменьшает напряженность полного поля внутри диэлектрика, а также может искажать поле вне диэлектрика. Рассмотренный механизм **электронной поляризации** является универсальным, т. к. смещение электронных оболочек происходит в атомах, молекулах или ионах любого диэлектрика. Он является одной из разновидностей так называемой **деформационной поляризуемости**.



Другой разновидностью деформационной поляризуемости является **ионная поляризация**. Кристаллические решетки многих ионных диэлектриков типа $NaCl$ можно рассматривать как состоящие из двух вставленных одна в другую подрешеток, каждая из которых образована ионами одного знака. Пока внешнее электрическое поле равно нулю, каждая кристаллическая ячейка и кристалл в целом нейтральны и неполярны. Во внешнем электрическом поле ионы подрешеток смещаются друг относительно друга в противоположных направлениях, вследствие чего на одной из двух противоположных граней кристалла будут преобладать положительные ионы, а на другой – отрицательные, т. е. кристалл в целом поляризуется. Ионная поляризация в чистом виде не наблюдается, ей всегда сопутствует электронная поляризация.

Многие диэлектрики (например, вода или соляная кислота) образованы из молекул, каждая из которых является электрическим диполем. Такие молекулы и образованные ими диэлектрики называют **полярными**. При отсутствии внешнего электрического поля молекулярные диполи из-за теплового движения расположены хаотично, взаимно компенсируя друг друга. Когда полярный диэлектрик попадает в электрическое поле, происходит поворот его молекулярных диполей – они стремятся расположиться «по полю». Но этому препятствует тепловое движение. В результате система полярных молекул в среднем приобретает некоторую преимущественную ориентацию, и диэлектрик в целом поляризуется. При этом разброс диполей по направлениям будет тем меньше, чем сильнее внешнее электрическое поле, и, следовательно, в более сильном электрическом поле диэлектрик будет поляризоваться сильнее. Такой механизм поляризации называется **ориентационным**.





По мере увеличения напряженности электрического поля в принципе может быть достигнуто такое состояние, при котором практически все молекулярные диполи будут ориентированы по полю, т. е. наступит *насыщение ориентационной поляризации*. Однако обычно гораздо раньше наступает электрический пробой диэлектрика, т.е. появление в нем свободных носителей заряда, вырванных сильным внешним полем из его атомов или молекул.

Электронная и ионная поляризуемости от температуры не зависят. А ориентационная поляризуемость вещества в одном и том же агрегатном состоянии убывает с ростом температуры. Это связано с тем, что повышение температуры усиливает хаотическое движение частиц вещества, тем самым препятствуя ориентации молекулярных диполей в электрическом поле. Вместе с тем, ориентационная поляризуемость в кристаллическом состоянии (т. е. при относительно низких температурах) обычно существенно меньше, чем в жидкой фазе. Это объясняется тем, что в твердом теле осуществить поворот полярных молекул значительно труднее, чем в жидкости.

10. Вектор поляризации диэлектрика. Диэлектрическая проницаемость среды

Для количественной характеристики поляризации диэлектрика служит специальная величина, называемая вектором поляризации. **Вектором поляризации диэлектрика** называют отношение векторной суммы электрических дипольных моментов всех молекул, заключенных в некотором объеме ΔV диэлектрика, к величине этого объема:

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V}\sum_j \overrightarrow{p_j}.$$

Опыт показывает, что для не слишком сильных электрических полей вектор поляризации линейно зависит от напряженности $\vec{E}$ электрического поля в диэлектрике. В простейшем случае изотропных диэлектриков (т. е. диэлектриков, величина поляризуемости которых не зависит от направления вектора $\vec{E}$) эту связь можно записать в виде

$$\vec{P} = æ\varepsilon_0\vec{E}.$$

При этом коэффициент пропорциональности æ называют **диэлектрической восприимчивостью вещества**. Если æ не зависит от координат, то такой диэлектрик называют *однородным*.

Важную роль в электростатике и электродинамике играет величина $\varepsilon = 1 + æ$, называемая (**относительной) диэлектрической проницаемостью вещества**. Дело в том, что оказывается справедливым следующее утверждение:

*Напряженность электрического поля, создаваемого любой системой точечных зарядов или проводников **с фиксированной величиной зарядов** в однородном изотропном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ε, **занимающем все пространство, где есть поле, в ε раз меньше, чем поле этой же системы зарядов и проводников в вакууме***. Очевидно, что при одинаковом выборе нулевой точки потенциал любой точки поля в описанной выше ситуации при наличии диэлектрика также в ε раз меньше, чем при его отсутствии.

Замечание. Можно также доказать, что если в сформулированном выше утверждении однородный изотропный диэлектрик занимает только **часть области**, где есть поле, но эта часть **ограничена эквипотенциальной поверхностью**, то по сравнению со случаем отсутствия диэлектрика поле вне диэлектрика не меняется, а поле внутри диэлектрика уменьшается в ε раз.

11. Электроемкость уединенного проводника

Важную роль в электростатике играет так называемая **теорема единственности.** *Рассмотрим произвольную систему, состоящую из неподвижных точечных зарядов, диэлектриков и проводников. Причем у каждого из проводников фиксирован либо его полный заряд, либо его потенциал. Тогда, если эта система помещена в заданное внешнее электростатическое поле, то* ***существует единственное*** *равновесное распределение зарядов на проводниках и поляризационных зарядов на диэлектриках, которое устанавливается самопроизвольно*.

Полное доказательство этой теоремы выходит за рамки курса элементарной физики, хотя, например, для частного случая полностью уединенного проводника или даже системы нескольких проводников доказать её можно и школьными методами.

Теорема единственности имеет важное следствие: *если мы нашли* (*например, угадали*) *такое распределение заряда на поверхности проводников и поляризационных зарядов на поверхности диэлектриков, при котором электростатическое поле внутри проводников равно нулю, и каждый из проводников имеет заданный полный заряд или потенциал, то, значит, именно такое распределение заряда и будет реализовано*.

Рассмотрим **уединенный проводник**, т. е. *проводник расположенный настолько далеко от всех других* ***заряженных*** *тел, что влиянием создаваемых ими электрических полей на рассматриваемый проводник можно пренебречь*. Точнее, можно пренебречь явлением электростатического индуцирования зарядов на этом проводнике другими заряженными телами и, следовательно, электрическим полем этих индуцированных зарядов.

Рассмотрим для начала *полностью* уединенный проводник, далеко удаленный от **всех**, а не только заряженных тел. Будем считать потенциал электростатического поля равным нулю на бесконечности и поместим на проводник заряд q. Он распределится по поверхности проводника каким-то образом (так, что поле в проводнике будет равно нулю) и создаст во всем пространстве некоторое поле $\vec{E}(r)$, потенциал которого во всех точках проводника будет иметь некоторое одинаковое значение φ, которое естественно назвать *потенциалом данного проводника*. Поместим теперь на проводник еще такой же заряд q. По теореме единственности он распределится так же, как и предыдущий заряд. В результате поле во всем пространстве удвоится, и, следовательно, удвоится потенциал проводника. Из сказанного следует, что **отношение заряда полностью**

уединенного **проводника к его потенциалу не зависит от величины заряда**. Это позволяет ввести понятие **электроемкости** (или просто емкости) C **уединенного проводника**, которая равна этому отношению:

$$C = \frac{q}{\varphi},$$

где φ – потенциал точек проводника в электрическом поле, создаваемом самим этим проводником, заряженным зарядом q.

Приведенные рассуждения сохраняют свою силу и в том случае, если проводник окружен другими ***незаряженными*** телами. Но наличие вблизи проводника любых других тел меняет его емкость, т. к. потенциал проводника зависит и от электрических полей, создаваемых зарядами, наведенными в окружающих телах вследствие электростатической индукции или поляризации. Кроме того, эти наведенные заряды могут влиять на распределение заряда q на самом проводнике, и значит, на создаваемое им электрическое поле и его потенциал.

Из сказанного выше следует, что емкость уединенного проводника определяется исключительно его формой, геометрическими размерами, а также размерами и формой окружающих его **незаряженных** тел.

Единица измерения емкости называется фарад (Ф). Из определения емкости следует, что емкостью в один фарад обладает такой уединенный проводник, потенциал которого при сообщении ему заряда 1 Кл равен 1 В:

$$1\text{Ф} = \frac{1\text{ Кл}}{1\text{ В}}.$$

Найдем, например, емкость полностью уединенного сферического проводника радиусом R, находящегося вдали от каких-либо тел. Как было показано в пункте 4 такой проводник, заряженный зарядом q, создает вне себя такое же поле, как точечный заряд q, помещенный в центр сферы. Поэтому, если принять за ноль потенциал на бесконечности, то его потенциал будет равен $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$. И, следовательно, его емкость

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R.$$

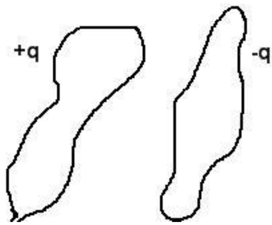
Если же эту сфера поместить в однородный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε, то её емкость увеличится в ε раз:

$$C_\varepsilon = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R.$$

Это связано с тем, что при наличии диэлектрика поле вокруг сферы, и, следовательно, ее потенциал, уменьшаются в ε раз.

12. Взаимная электроемкость двух проводников. Конденсаторы

Рассмотрим теперь систему из двух проводников *в отсутствии внешнего электрического поля*. Сообщим им равные по модулю заряды противоположного знака. В результате между проводниками возникнет разность потенциалов. Рассуждая так же, как в случае одного проводника, можно доказать, что отношение заряда q к разности потенциалов между проводниками $\varphi_1 - \varphi_2$ не зависит от величины q. Это отношение, точнее его модуль, называют **взаимной емкостью двух проводников**: $C = \left|\frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}\right|$.



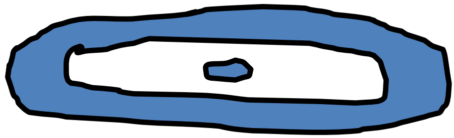
Так как силовые линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных, а потенциал, как следует из его определения, уменьшается при движении по направлению силовых линий, то $|\varphi_1 - \varphi_2| = \varphi_+ - \varphi_-$, где φ_+ потенциал проводника, заряженного положительно, а φ_- – отрицательно. Поэтому:

$$C = \frac{|q|}{\varphi_+ - \varphi_-} = \frac{q}{\varphi_q - \varphi_{-q}},$$

где φ_q – потенциал проводника заряженного зарядом q (любого знака), а φ_{-q} – потенциал второго проводника, заряженного зарядом минус q.

Так же как и ёмкость уединённого проводника, взаимная емкость двух проводников зависит от их формы, размеров и взаимного расположения, а также от размеров и формы окружающих их **незаряженных** тел и, в частности, от среды, в которой они находятся.

Определение. Конденсатором называется система двух разноименно заряженных равными по абсолютной величине зарядами проводников, имеющих такую форму и расположение друг относительно друга, что поле, создаваемое такой системой, сосредоточено в ограниченной области пространства. Сами проводники при этом называются обкладками конденсатора.



Электроемкостью конденсатора называется взаимная емкость его обкладок.

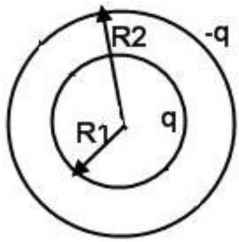
Примером конденсатора является любой полый проводник, в полости которого находится другой проводник. При этом полость между проводниками может быть заполнена каким-нибудь диэлектриком.

13. Емкость плоского и сферического конденсаторов

Наиболее часто используются плоские и сферические конденсаторы.

Сферический конденсатор состоит из двух проводящих концентрических сфер, пространство между которыми может быть заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε. Такая система создает не равное нулю поле только между обкладками, причем это поле равно полю точечного заряда, уменьшенному в ε раз:

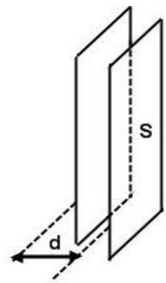
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{r^2}.$$



Соответственно $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{r} + C_0$, и $\varphi_q - \varphi_{-q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{q(R_2-R_1)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2R_1}$. Поэтому емкость сферического конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_q - \varphi_{-q}} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon\frac{R_2R_1}{R_2 - R_1}.$$

Видно, что при наличии диэлектрика емкость возрастает (для всех диэлектриков $\varepsilon > 1$). Однако наличие диэлектрика может уменьшать напряжение пробоя конденсатора – разность потенциалов между обкладками, при которой происходит электрический пробой слоя диэлектрика.



Плоский конденсатор состоит из двух проводящих параллельных пластин одинаковой формы (площади S), расположенных напротив друг друга на расстоянии d, малом по сравнению с поперечными размерами пластин. Поэтому электрическое поле между пластинами направлено перпендикулярно пластинам от положительно заряженной пластины к отрицательно заряженной и приближенно равно

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

где $\sigma = \frac{|q|}{S}$ – модуль поверхностной плотности заряда на каждой из пластин. Следовательно,

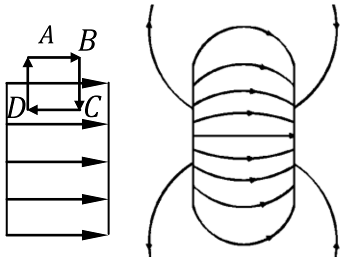
$$\varphi_+ - \varphi_- = Ed = \frac{|q|d}{\varepsilon_0 S},$$

и, значит, емкость плоского конденсатора

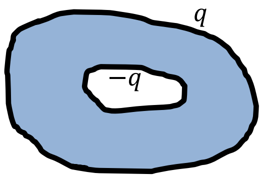
$$C = \frac{|q|}{\varphi_+ - \varphi_-} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

Если плоский конденсатор, обкладки которого имеют заряды фиксированной величины, полностью заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, то поле и разность потенциалов между обкладками уменьшатся в ε раз, и, значит, емкость плоского конденсатора увеличится в ε раз.

Подчеркнём, что модель плоского конденсатора, в которой считается, что электрическое поле однородно в области между пластинами и равно нулю вне этой области, имеет ограниченную применимость. Дело в том, что электростатическое поле в такой модели является не потенциальным: работа по замкнутому контуру ABCD (см. рисунок) не равна нулю, что невозможно. На самом деле электростатическое поле вблизи краев плоского конденсатора неоднородно и вне границ конденсатора поле не равно нулю, хоть и очень слабое. Модель плоского конденсатора работает тем лучше, чем меньше отношение $\frac{d^2}{S}$. Однако в ряде случаев краевыми эффектами нельзя полностью пренебречь ни при каких условиях (см. пример 6 в разделе примеры решения задач).



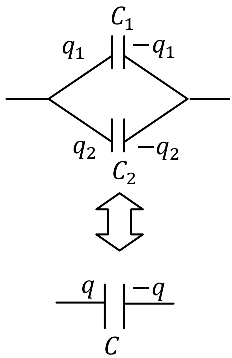
Расчёт емкости конденсатора в случае обкладок произвольной формы является сложной задачей. Однако и в этом случае заполнение всего пространства между обкладками диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε приводит к увеличению емкости конденсатора в ε раз (за счет уменьшения в ε раз поля между обкладками и, следовательно, разности потенциалов между ними).



14. Параллельное и последовательное соединение конденсаторов

Система, полученная в результате соединения обкладок нескольких конденсаторов проводниками (пренебрежимо малой емкости), называется **батареей конденсаторов**. В ряде случаев батарею конденсаторов можно описать как один конденсатор общей емкостью C.

Если в системе двух конденсаторов с емкостями C_1 и C_2 обкладки разных конденсаторов соединены попарно (батарея содержит два изолированных проводника), то такое соединение называется **параллельным**. Два (и более) параллельно соединенных конденсатора **всегда** можно описать как один конденсатор некоторой емкостью C. Общим для всех параллельно соединённых конденсаторов является разность потенциалов между их обкладками $\Delta\varphi$. При этом по определению ёмкости конденсатора заряды на обкладках каждого из параллельно соединенных конденсаторов можно найти по формулам



$$q_1 = C_1\Delta\varphi, \quad q_2 = C_2\Delta\varphi.$$

Поэтому суммарный заряд, находящийся на одной из обкладок батареи, равен

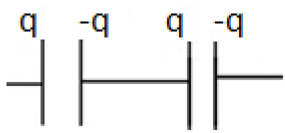
$$q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)\Delta\varphi.$$

И, следовательно, емкость батареи

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = C_1 + C_2.$$

Аналогично, *емкость батареи из N конденсаторов, соединенных параллельно, равна сумме емкостей всех отдельных конденсаторов*.

Если у двух конденсаторов с емкостями C_1 и C_2 соединена одна пара обкладок (батарея содержит три изолированных проводника), то такое соединение конденсаторов называется **последовательным**. *Последовательно соединенные конденсаторы можно рассматривать как новый конденсатор только, если соединенные между собой обкладки в целом электронейтральны*!



В этом случае одинаковым для всех конденсаторов является заряд q, равный заряду батареи, и мы можем написать

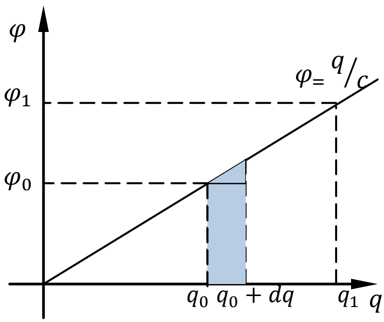
$$\Delta\varphi_1 = \frac{q}{C_1}, \;\; \Delta\varphi_2 = \frac{q}{C_2}, \;\; \Delta\varphi = \frac{q}{C}.$$

Но $\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = q(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2})$. Поэтому для ёмкости батареи C имеем:

$$\frac{1}{C} = \frac{\Delta\varphi}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Аналогично, *при последовательном соединении N конденсаторов обратная ёмкость батареи равна сумме обратных ёмкостей составляющих её конденсаторов*. Еще раз подчеркну: *это справедливо только, если полный заряд на каждой паре соединенных между собой обкладок конденсаторов равен нулю*!

15. Энергия заряженного конденсатора. Плотность энергии электростатического поля



Чтобы зарядить конденсатор, необходимо перенести свободные заряды с одной его обкладки на другую. Электростатическое поле, возникающее при этом между обкладками, будет действовать на переносимые заряды, препятствуя процессу переноса, т. е. совершая отрицательную работу и увеличивая потенциальную энергию взаимодействия разделенных зарядов, т. е. потенциальную энергию конденсатора. Пусть обкладки конденсатора уже заряжены зарядами q_0 и $-q_0$ ($q_0 > 0$) и емкость конденсатора равна C. Тогда разность потенциалов между его обкладками будет равна $\varphi_0 = \varphi_+ - \varphi_- = q_0/C$. Следовательно, при переносе очень малого положительного заряда dq с отрицательно заряженной обкладки на положительно заряженную обкладку, электрическое поле совершит малую работу $\delta A = -\,dq\varphi_0$. При этом потенциальная энергия конденсатора увеличится на $dW = dq\varphi_0$. Если построить график зависимости разности потенциалов между обкладками конденсатора от величины его заряда q, то dW при очень малом dq будет равно площади заштрихованной области под графиком (см. рисунок), умноженной на соответствующий масштабный множитель. Суммируя такие площади, получим, что при перемещении с одной первоначально не заряженной обкладки конденсатора емкости С на другую его обкладку некоторого заряда q_1, электрическое поле совершит работу, равную площади прямоугольного треугольника со сторонами q_1 и φ_1:

$$A = -\frac{1}{2}\varphi_1 q_1 = -\frac{q_1^2}{2C} = -\frac{C\varphi_1^2}{2},$$

и, значит, энергия конденсатора W увеличится на величину

$$\Delta W = \frac{1}{2}q_1\varphi_1 = \frac{q_1^2}{2C} = \frac{C\varphi_1^2}{2}.$$

Полагая энергию незаряженного конденсатора равной нулю, получим, что энергия конденсатора емкости С, заряженного зарядом q до разности потенциалов φ равна

$$W = \frac{1}{2}q\varphi = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2}.$$

С другой стороны, когда конденсатор не заряжен, он не создает электрического поля, а когда заряжен – создаёт. Поэтому *энергию заряженного конденсатора можно рассматривать как энергию электростатического поля, заключенного между его обкладками*.

Рассмотрим плоский конденсатор с пластинами площади S, расположенными на расстоянии d. Пусть пространство между пластинами заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, и пластины заряжены зарядом q. Тогда между пластинами существует почти однородное электростатическое поле с напряженностью

$$E = \frac{q}{S\varepsilon_0\varepsilon}.$$

При этом разность потенциалов между пластинами будет равна

$$\varphi = Ed.$$

Выражая из предпоследней формулы q через E и подставляя выражения для q и φ в формулу для энергии заряженного конденсатора (и, следовательно, для энергии электростатического поля), получим:

$$W = \frac{1}{2}(S\varepsilon_0\varepsilon E)(Ed) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2 V,$$

где $V \equiv Sd$ – объем области между обкладками конденсатора. Отсюда очевидно, что плотность энергии электрического поля, т. е. его энергия в единице объема, определяется формулой:

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2.$$

Оказывается, что полученная формула имеет общий характер и справедлива для плотности энергии любого (не только однородного) электрического поля.

16. Примеры задач

Рекомендуется первоначально пытаться решать задачи самостоятельно, а потом сравнивать свои решения с решениями, которые приведены после списка задач.

Пример 1. Плоский воздушный конденсатор состоит из двух легких одинаковых горизонтальных пластин площади S, расположенных напротив друг друга. Одна из пластин жестко прикреплена к полу, а вторая – подвижная – крепится к потолку с помощью пружины с коэффициентом жесткости k. Когда конденсатор не заряжен, расстояние между его пластинами равно d. Определить величину растяжения пружины X, если конденсатор медленно зарядить так, что величина противоположных по знаку зарядов на его обкладках будет равна q.

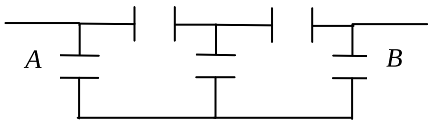
Пример 2. Величина однородного электрического поля слева от плоской бесконечной проводящей пластины равна E_1, а справа – E_2 (с обеих сторон силовые линии направлены от пластины). Определить силу f, действующую со стороны электрического поля на часть пластины в форме прямого цилиндра с площадью основания S.

Пример 3. Известно, что Земля создает электрическое поле, напряженность которого вблизи поверхности составляет E = 130 В/м. Определить какой электрический потенциал имела бы поверхность Земли без атмосферы, принимая за ноль потенциал на бесконечности.

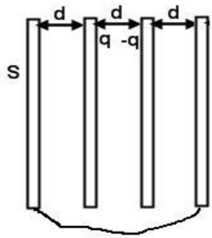
Пример 4. На расстоянии R = 1 м от центра проводящего заземленного шара радиуса r = 0,5 м находится точечный заряд q = 10^{-4} Кл. Найдите полный заряд, индуцированный на шаре. Влиянием проволоки пренебречь.

Примечание. В задачах заземление некоторого проводника следует понимать следующим образом: если принять за ноль потенциал на бесконечности, то потенциал заземленного проводника будет равен нулю.

Пример 5. Определите емкость соединения конденсаторов между точками A и B. На схеме емкости всех конденсаторов одинаковы и равны C.

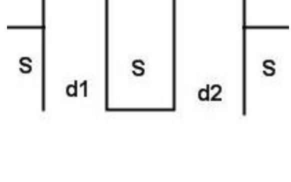


Пример 6. Четыре первоначально незаряженные одинаковые пластины поместили напротив друг друга на расстоянии d. Две средних пластины зарядили зарядами $+q$ и $–q$. А две крайние соединили проводником. Чему будут равны заряды на крайних пластинах, если расстояния между пластинами малы по сравнению с их линейными размерами.



Пример 7. Плоский конденсатор с пластинами площадью S, расположенными на расстоянии d_0 друг от друга, заряжен при помощи батареи до разности потенциалов φ_0, а затем отключен от неё. Какой станет разность потенциалов между обкладками конденсатора, если в него полностью внести металлическую незаряженную пластину толщиной d и той же площади S?

Пример 8. Плоский конденсатор с пластинами площадью S, расположенными на расстоянии d_0 друг от друга, заряжен при помощи батареи до разности потенциалов φ_0, а затем отключен от неё. Какой станет разность потенциалов между обкладками конденсато-



ра, если в него полностью внести металлическую **заряженную зарядом Q** пластину той же площади S? Расстояния от заряженной пластины до обкладок конденсатора указаны на рисунке.

Пример 9. Металлическая сфера, заряженная зарядом q, окружена концентрическим шаровым слоем диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε. Как будут распределены и чему будут равны поляризационные заряды диэлектрика.

Пример 10. Две пластины плоского воздушного конденсатора, соединенные проводником, находятся на расстоянии d друг от друга во внешнем электрическом поле напряженностью E_0, перпендикулярном пластинам. Какую работу надо совершить, чтобы сблизить пластины до расстояния а) $d/2$; б) 0? Площадь пластин равна S. Расстояние между пластинами много меньше их размеров.

Решения задач

Пример 1. Раз в задаче идёт речь о плоском конденсаторе, значит, подразумевается, что расстояние между пластинами мало (много меньше их минимального линейного размера), и краевыми эффектами можно пренебречь. То есть можно считать, что заряд на каждой из пластин распределяется почти равномерно, и каждая из пластин создаёт вблизи себя электрическое поле $E_{пл} = q/(2\varepsilon_0 S)$, где ε_0 – электрическая постоянная. Заряды другой пластины будут находиться в этом электрическом поле и на них будет действовать сила притяжения (заряды пластин конденсатора противоположны по знаку) $qE_{пл} = q^2/(2\varepsilon_0 S)$. Так как конденсатор заряжают медленно, то можно считать, что в каждый момент времени сила упругости пружины kX уравновешивает силу электрического взаимодействия пластин конденсатора друг с другом: $kX = q^2/(2\varepsilon_0 S)$. Откуда $X = q^2/(2\varepsilon_0 Sk)$. Полученный ответ справедлив, если $q^2/(2\varepsilon_0 Sk) < d$. Как только величина заряда каждой из пластин станет равной $(2\varepsilon_0 Sdk)^{1/2}$, пластины прикоснуться друг к другу и произойдет разряд конденсатора, после чего подвижная пластина вернётся в исходное состояние.

Важное замечание. Заряженное тело может деформироваться под действием сил электрического взаимодействия отдельных его частей между собой, но по третьему закону Ньютона векторная сумма этих сил взаимодействия равна нулю. Поэтому если нас интересует сумма всех электрических сил, действующих на заряженное тело, мы должны найти электрическое поле, создаваемое зарядами, не находящимися на этом теле!

Пример 2. В конце пункта 7 была получена формула, связывающая поверхностную плотность σ заряда на некотором участке поверхности проводника с напряжённостью полного электрического поля $\vec{E}$ около этого участка: $\vec{E} = \sigma\vec{n}/\varepsilon_0$, где $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности проводника. По условию вектор напряженности электрического поля с обеих сторон пластины направлен от неё. Значит её поверхности заряжены положительно с поверхностными плотностями $\sigma_1 = \varepsilon_0 E_1$, $\sigma_2 = \varepsilon_0 E_2$, и пластина создаёт по обе стороны от себя однородное электрическое поле, напряженность которого перпендикулярна пластине, направлена от неё и равна $\sigma_0/(2\varepsilon_0)$, где $\sigma_0 = \sigma_1 + \sigma_2$. По условию поля слева и справа от заряженной пластины разные по величине. Следовательно, эти поля создаются зарядами не только пластины, но и других тел. Поле этих внешних зарядов и действует на пластину (см. также замечание к решению предыдущей задачи). Обозначим его через $\boldsymbol{E}_{\text{вн}}$. Очевидно, оно также будет направлено перпендикулярно пластине.

Направим ось X перпендикулярно пластине слева направо. Тогда проекция полного электрического поля справа от пластины будет равна E_2, а проекция поля самой пластины: $\sigma_0/(2\varepsilon_0) = (E_1 + E_2)/2$. По принципу суперпозиции для напряженностей электрического поля имеем:

$$E_2 = \frac{E_1 + E_2}{2} + E_{\text{вн},x},$$

где $E_{\text{вн},x}$ – проекция на ось X вектора напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}_{\text{вн}}$, создаваемого зарядами, находящимися вне пластины. Отсюда

$$E_{\text{вн},x} = \frac{E_2 - E_1}{2}.$$

Поэтому сила f, действующая со стороны электрического поля на часть пластины в форме прямого цилиндра с площадью основания S, будет перпендикулярна пластине, и её проекция на ось X будет равна:

$$f_x = S\sigma_0 E_{\text{вн},x} = \frac{\varepsilon_0 (E_2 + E_1)(E_2 - E_1)}{2} S = \frac{\varepsilon_0 (E_2^2 - E_1^2)}{2} S.$$

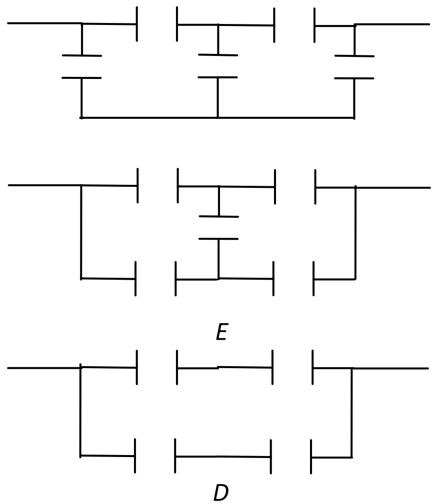
Пример 3. Как отмечалось в конце пункта 4, поле тела, сферически симметрично заряженного зарядом Q, ***вне этого тела*** такое же, как у точечного заряда Q, помещенного в центр тела: $E = Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$. Поэтому, если принять за ноль потенциал на бесконечности, то **везде вне тела и на его поверхности** потенциал электрического поля, создаваемого телом, будет совпадать с потенциалом поля точечного заряда, помещенного в центр тела: $\varphi = Q/(4\pi\varepsilon_0 r)$. То есть везде вне тела, в том числе вблизи его поверхности, $\varphi = Er$. Поэтому потенциал Земли без атмосферы (в которой также имеются заряды, которые существенно меняют зависимость поля Земли от расстояния до её центра) был бы равен $\varphi = ER \approx 8 \cdot 10^8$ В.

Пример 4. Как отмечалось в пункте 7, поле внутри проводника в условиях равновесия равно нулю, поэтому весь объем такого проводника является эквипотенциальным, т. е. потенциалы всех его точек одинаковы, и, кроме того, не скомпенсированные заряды могут находиться только на поверхности проводника.

Разделим всю поверхность шара на большое число N маленьких участков и обозначим заряд i-го такого участка через q_i. Каждый такой заряд можно считать точечным и для потенциала создаваемого им электрического поля пользоваться формулой для потенциала точечного заряда, полученной в конце пункта 6. Тогда, принимая за ноль потенциал на бесконечности, по принципу суперпозиции потенциалов получим, что потенциал центра шара (точки O) может быть рассчитан по формуле

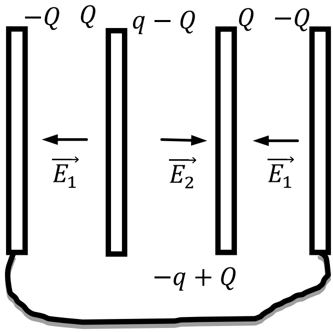
$$\varphi_O = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

где $Q = \sum_{i=1}^{N} q_i$ – полный заряд, индуцированный на шаре. Но по условию шар заземлен, следовательно, его потенциал равен потенциалу на бесконечности, т. е. нулю. Поэтому окончательно получаем: $Q = -rq/R = -5\cdot 10^{-5}$ Кл.



Пример 5. Перерисуем исходную схему (первый рисунок) в более удобном для анализа виде (второй рисунок), и рассмотрим вспомогательную схему, отличающуюся от исходной и перерисованной схем отсутствием центрального конденсатора (третий рисунок). Поскольку в третьей схеме все конденсаторы одинаковые, то, очевидно, что потенциалы точек E и D будут совпадать. А это означает, что при подсоединении к этим точкам любого незаряженного конденсатора, его заряд будет оставаться равным нулю, а заряды и потенциалы обкладок всех остальных конденсаторов в схеме не изменятся. Следовательно, емкости батарей конденсаторов, изображенных на третьей и второй схемах, совпадают. Но третья схема состоит из двух параллельно соединенных одинаковых ветвей, каждая из которых образована двумя последовательно соединенными одинаковыми конденсаторами ёмкости C. Пользуясь формулами для последовательного и параллельного соединения конденсаторов, получим, что искомая ёмкость равна C.

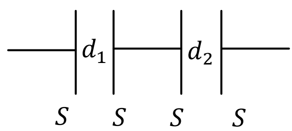
Пример 6. Если пользоваться моделью плоского конденсатора, то, казалось бы, крайние пластины просто «не узнают» о том, что средние пластины зарядили (поле снаружи от средних пластин в этой модели равно нулю). Однако на самом деле из-за краевых эффектов это не так. В результате правая пластина окажется заряженной положительно, а левая – отрицательно. При этом заряды на сторонах пластин распределяться так, чтобы напряженность электрического поля в пластинах была равна нулю. Поскольку расстояния между пластинами мало по сравнению с их линейными размерами, то ***при количественных расчетах*** краевыми эффектами можно пренебречь. В этом приближении заряды на каждой из сторон каждой пластины будут распределены равномерно. Их полная величина для каждой из сторон приведена на рисунке (на самых крайних сторонах заряды будут равны нулю). В пренебрежении краевыми эффектами такое распределение заряда создаёт внутри пластин нулевое электрическое поле, и, поэтому, по теореме единственности именно такое распределение заряда и будет иметь место. Пользуясь полученной в пункте 4 формулой для напряженности электрического поля бесконечной равномерно заряженной плоскости, получим, что $E_1 = Q/S\varepsilon_0$, $E_2 = (q-Q)/S\varepsilon_0$ (выбранные за положительные направления для каждого из векторов напряженности указаны на рисунке). Величину заряда Q найдем из условия, что крайние пластины имеют одинаковый потенциал:



$$E_1 d - E_2 d + E_1 d = 0.$$

Откуда $E_2 = 2E_1$, и, значит, $q - Q = 2Q$. Из последней формулы окончательно имеем: $Q = q/3$.

Пример 7. Как было показано в пункте 13, ёмкость плоского конденсатора $C_0 = S\varepsilon_0/d_0$. Следовательно, заряд на его обкладках $q_0 = C_0\varphi_0 = S\varepsilon_0\varphi_0/d_0$. После внесения пластины мы получаем батарею из двух последовательно соединенных конденсаторов. Пользуясь соответствующей формулой из пункта 14, имеем:



$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{S\varepsilon_0} + \frac{d_2}{S\varepsilon_0} = \frac{d_1 + d_2}{S\varepsilon_0} = \frac{d_0 - d}{S\varepsilon_0}.$$

Откуда ёмкость батареи $C = S\varepsilon_0/(d_0 - d)$. Поскольку заряд батареи q_0, то искомая разность потенциалов:

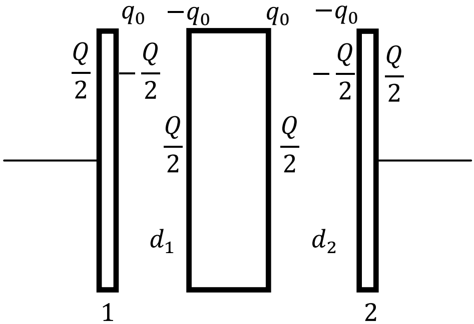
$$\varDelta\varphi_1 = \frac{q_0}{C} = \frac{S\varepsilon_0}{d_0}\varphi_0\frac{d_0 - d}{S\varepsilon_0} = \frac{d_0 - d}{d_0}\varphi_0.$$

Пример 8. Пусть q_0 – заряд левой обкладки конденсатора. Пренебрегая краевыми эффектами и пользуясь теоремой единственности, получим, что заряды распределятся на пластинах так, как показано на рисунке (при этом напряженность электрического поля во всех трёх проводниках будет равна нулю). Направим ось X перпендикулярно пластинам слева направо. Тогда проекция напряженности электрического поля на ось X в левом зазоре между пластинами будет равна $E_{1x} = \frac{q_0 - Q/2}{S\varepsilon_0}$, а в правом зазоре – $E_{2x} = \frac{q_0 + Q/2}{S\varepsilon_0}$. Поэтому для разности потенциалов между обкладками 1 и 2 справедлива формула:

$$\varDelta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = E_{1x}d_1 + E_{2x}d_2 = \frac{q_0}{S\varepsilon_0}(d_1 + d_2) + \frac{Q}{2S\varepsilon_0}(d_2 - d_1).$$

Поскольку $q_0 = \frac{S\varepsilon_0}{d_0}\varphi_0$ (см. пример 7), то окончательно имеем:

$$\varDelta\varphi = \frac{d_1 + d_2}{d_0}\varphi_0 + \frac{Q}{2S\varepsilon_0}(d_2 - d_1).$$



Пример 9. Пусть центр металлической сферы находится в точке O, её радиус равен R, а внешний радиус диэлектрического слоя $R + d$. Границы диэлектрика являются эквипотенциальными поверхностями поля, создаваемого заряженной металлической сферой. Поэтому, как отмечалось в пункте 10, при появлении такого шарового слоя поле вне диэлектрика не изменится, а поле внутри диэлектрика уменьшится в ε раз по сравнению с полем, которое было до внесения диэлектрика. То есть на

расстоянии r ($R < r < R + d$) от центра сферы напряженность электрического поля будет равна $q/(4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2)$. Поэтому поток напряженности электрического поля через любую расположенную внутри диэлектрика сферическую поверхность с центром в точке O будет равен $q/(\varepsilon\varepsilon_0)$. И значит, по теореме Гаусса внутри этой сферической поверхности будет находиться суммарный заряд q/ε. Он складывается из заряда металлической сферы q и искомых поляризационных зарядов диэлектрика $q_{пол}$. Откуда получаем, что $q_{пол} = q/\varepsilon - q = q(1-\varepsilon)/\varepsilon$. Поскольку мы получили, что величина поляризационных зарядов, находящихся внутри указанной сферической поверхности не зависит от её радиуса (лишь бы поверхность находилась внутри диэлектрика), то, следовательно, не скомпенсированные поляризационные заряды диэлектрика будут расположены только на внутренней и внешней поверхностях диэлектрического шарового слоя. В целом диэлектрик не заряжен, поэтому поляризационный заряд на внешней поверхности шарового слоя диэлектрика, очевидно, будет равен $q(\varepsilon-1)/\varepsilon$.

Пример 10. Проще всего эту задачу решить, пользуясь законом сохранения энергии и полученной в конце пункта 15 формулой для плотности энергии электрического поля с напряженностью E, которая в нашем случае ($\varepsilon = 1$) принимает вид: $w = \varepsilon_0 E^2/2$.

Так как пластины плоского воздушного конденсатора соединены проводником, то их потенциалы равны и, следовательно, в пренебрежении краевыми эффектами поле внутри конденсатора равно нулю. Это получается за счёт того, что пластины конденсатора под действием внешнего электрического поля заряжаются равными по величине и противоположными по знаку зарядами, которые создают внутри конденсатора электрическое поле равное по величине и противоположное по направлению внешнему полю. В пренебрежении краевыми эффектами поле этих зарядов на пластинах конденсатора вне конденсатора равно нулю. Поэтому, сдвигая пластины конденсатора на x, мы увеличиваем объём области, где имеется электрическое поле с напряженностью E_0 на xS. При этом энергия электрического поля увеличивается на $\varepsilon_0 E_0^2 xS/2$. По закону сохранения энергии мы должны совершить как минимум (в отсутствии сил трения) такую же работу. Таким образом, получаем ответы. В случае (а) $A = \varepsilon_0 E_0^2 dS/4$. В случае (б) $A = \varepsilon_0 E_0^2 dS/2$.

Часть II

Постоянный ток

1. Ток проводимости. Плотность тока. Сила тока

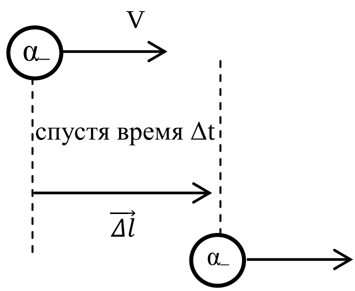
Определение. *Электрическим током* называется направленное движение носителей электрических зарядов (электронов, ионов и др.).

До некоторой степени условно различают конвекционные токи и токи проводимости.

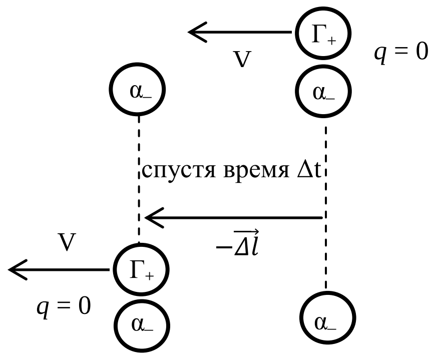
Конвекционный ток – это электрический ток, обусловленный движением заряженной среды или пучками заряженных частиц.

Током проводимости называется электрический ток в проводящих средах, где носители заряда перемещаются внутри неподвижных макросред, испытывая соударения с формирующими эти среды частицами.

Заметим, что *реальное* смещение отрицательно заряженной частицы α_- на величину $\Delta\vec{l}$ с точки зрения переноса электрического заряда неотличимо от *гипотетического* смещения на величину «$-\Delta\vec{l}$» гипотетической положительно заряженной частицы Γ_+ с зарядом, равным модулю заряда частицы α_- (см. рисунки).



Реальное движение отрицательно заряженной частицы



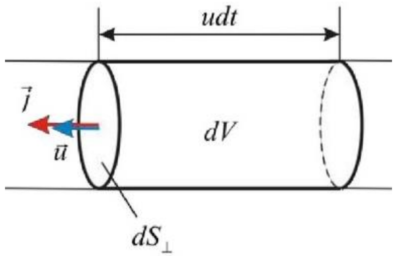
Гипотетическое движение гипотетической положительно заряженной частицы Γ_+

Количественными характеристиками электрического тока являются вектор плотности тока $\vec{j}$ и сила тока I (скаляр).

Определение. В каждой точке проводника *вектор плотности тока* $\vec{j}$ направлен в сторону упорядоченного движения (реального или гипотетического) положительных зарядов. Модуль вектора $\vec{j}$ равен отношению величины заряда dq, прошедшего за малый интервал времени dt через малый элемент поверхности dS, *перпендикулярный направлению упорядоченного движения зарядов*, к площади этого элемента поверхности и к величине времени dt:

$$|\vec{j}| = \frac{|dq|}{dt\,dS}.$$

Итак, *направление вектора плотности тока условились считать совпадающим с направлением упорядоченного движения положительно заряженных частиц*. Это удобно, поскольку, как мы увидим позже, при этом направление тока проводимости всегда совпадает с направлением вектора напряженности электрического поля. Вместе с тем, направление тока в металлах оказывается противоположным направлению реального упорядоченного движения создающих его электронов.



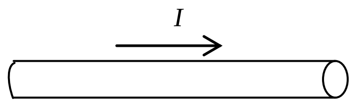
Пусть электрический ток создаётся частицами, одинаково заряженными зарядом q, $\vec{u}$ – средняя скорость их упорядоченного движения, а n – их концентрация (число частиц в единице объема). Тогда за малое время dt через поперечное сечение проводника $dS_\perp$, перпендикулярное направлению упорядоченного движения носители заряда, пройдут все частицы, находящиеся в прямом цилиндре с площадью основания $dS_\perp$ и высотой udt. Таких частиц будет $N = ndS_\perp udt$. Эти частицы перенесут заряд $dq = Nq = nqdS_\perp udt$. И, следовательно, модуль плотности тока будет равен $j = |dq|\,/(dt\,dS_\perp) = n|q|u$. По определению вектор плотности тока $\vec{j}$ направлен в сторону упорядоченного движения (реального или гипотетического) положительных зарядов. Поэтому окончательно имеем:

$$\vec{j} = nq\vec{u}.$$

Определение. *Силой тока I* через какую-либо поверхность называют отношение величины заряда dq, прошедшего за малый интервал времени dt через эту поверхность, к интервалу времени dt:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

В качестве рассматриваемой поверхности часто используют полное (например, поперечное) сечение проводника. В этом случае говорят о силе тока в этом сечении проводника или просто в проводнике. Сила тока – скалярная величина, но при схематическом изображении проводника с током направление **тока** (т. е. направление реального или гипотетического переноса положительного заряда) указывают стрелкой.



Зная вектор плотности тока $\vec{j}$ в каждой точке проводника, можно найти силу тока I, протекающего через произвольную поверхность S: сила тока равна потоку вектора плотности тока через поверхность S (*поток любого вектора определяется так же, как был определён в электростатике поток вектора напряженности электрического поля*).

В частности, если поверхность S перпендикулярна вектору плотности тока $\vec{j}$ и плотность тока одинакова во всех точках поверхности S, то

$$I_S = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{j\, S_0\, \Delta t}{\Delta t} = j\, S_0,$$

где S_0 – площадь поверхности S.

Единица силы тока – *ампер* (А). Её определение основано на явлении притяжения (отталкивания) проводников с постоянным током из-за их магнитного взаимодействия.

Определение. *Электрический ток называется постоянным*, если во всех точках проводника вектор плотности тока не меняется с течением времени.

2. Электрический ток в металлах. Закон Ома в дифференциальной форме

Электрический ток в металлических проводниках не вызывает в них никаких изменений, кроме нагревания. Это было подтверждено опытами Э. Рикке (1901 г.). В этих опытах электрический ток примерно год пропускали через три прижатых друг к другу хорошо отполированных цилиндра – медный, алюминиевый и снова медный. Общий заряд, прошедший за это время через цилиндры был очень велик – около $3.5{\cdot}10^6$ Кл при силе тока $I \approx 0.1$ А. После окончания опытов было установлено, что имеются лишь незначительные следы взаимного проникновения металлов, которые не превышают результатов обычной диффузии атомов в твердых телах. Следовательно, свободными носителями заряда в металлах являются не ионы. Остается предположить, что перенос заряда осуществляется отрицательно заряженными частицами, входящими в состав атомов всех веществ – электронами.

В сильно упрощенном виде современные *классические* (в смысле ***не*** квантово-механические) представления о природе металлов сводятся к следующему. Электроны, расположенные на внешних орбитах атомов, наиболее удалены от ядер и весьма слабо связаны в атоме. При образовании кристалла, когда атомы приближаются достаточно близко друг к другу, внешние электроны притягиваются и к соседним ядрам. Это притяжение настолько ослабляет связь внешнего электрона со своим ядром, что он теряет связь с определенным атомом и может перемещаться по всему кристаллу в любом направлении. В результате электроны как *газ* заполняют пространство между ионами решетки. Разумеется, перемещаясь по кристаллу, они взаимодействуют с положительно заряженными ионами решетки. Обычно на каждый атом решетки приходится один или два таких «свободных» электрона. Эти электроны и являются носителями тока в металлах. Слово «свободный» взято в кавычки, т. к. свойства электронов в металле значительно отличаются от свойств действительно свободных электронов в вакууме.

С точки зрения классической теории средняя скорость теплового движения электронов в металле при комнатной температуре в отсутствии внешнего воздействия составляет около $10^5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. При этом электрон движется по прямой, пока не столкнется с каким-нибудь ионом кристаллической решетки. При таком столкновении скорость электрона $\vec{v}$ изменяется по величине и направлению. Столкновения являются независимыми, случайными событиями, поэтому направление скорости электрона после нескольких столкновений не зависит от её первоначального направления. В результате вектор средней скорости электронов равен нулю, и поэтому полный заряд, переносимый электронами через любое сечение проводника, также равен нулю – электрический ток отсутствует.

При появлении в проводнике электрического поля $\vec{E}$ электроны под его действием приобретают ускорение:

$$\vec{a} = -\frac{e}{m}\vec{E},$$

где $e \approx 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – модуль заряда электрона, а m – его масса. В результате за время τ между соударениями электроны приобретают скорость упорядоченного движения $\vec{v}$. Её средняя величина для каждого электрона: $\frac{1}{2}\vec{a}\tau$, а для всех электронов:

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{1}{2}a\tau_{\text{ср}} = -\frac{e}{2m}\vec{E}\tau_{\text{ср}}.$$

где $\tau_{\text{ср}}$ – среднее время свободного пробега электрона. Его величина, вообще говоря, может зависеть от E. Однако для не слишком больших токов и напряжений оказывается, что $|\vec{v}_{\text{ср}}|$ на много порядков меньше среднеквадратичной скорости теплового движения электронов, и, следовательно, зависимостью $\tau_{\text{ср}}$ от $\vec{E}$ в этих случаях можно пренебречь. Чтобы в этом убедиться оценим среднюю скорость $\vec{v}_{ср}$ упорядоченного движения электронов в медном проводе сечения $S = 1$ мм^2, по которому течёт ток $I = 10\ A$. Ранее было показано, что

$$\vec{j} = n\, q\, \vec{v}_{ср},$$

где n – концентрация носителей заряда (число частиц в единице объема), а $\vec{v}_{ср}$ – средняя скорость их упорядоченного движения.
Соответственно, если носителями заряда являются электроны, получим:

$$\vec{j} = -en\vec{v}_{ср}.$$

Из последней формулы имеем:

$$v_{ср} = \frac{j}{en} = \frac{I}{enS}.$$

Концентрацию «свободных» электронов в меди найдем, считая, что каждый атом меди теряет один электрон (плотность меди $\rho = 8{,}9\ 10^3\ \frac{кг}{м^3}$, атомное число A = 64, N_A – число Авогадро):

$$n = \frac{\rho\, N_A}{\mu} = \frac{8{,}9 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-3}} 6 \cdot 10^{23} = 8{,}3 \cdot 10^{28}\ м^{-3}.$$

Из последних двух формул окончательно имеем:

$$v_{ср} = \frac{10}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 8{,}3 \cdot 10^{28} \cdot 10^{-6}} = 7 \cdot 10^{-4}\ \frac{м}{с}.$$

Таким образом, действительно с большим запасом

$$v_{ср} \ll u_{тепл} \sim 10^5 \frac{м}{с}.$$

Подставляя в выражение для $\vec{j}$ формулу для средней скорости, получим:

$$\vec{j} = \frac{e^2 n\, \tau_{ср}}{2m}\vec{E} = \lambda\vec{E},$$

где $\lambda = \frac{e^2 n\, \tau_{ср}}{2m}$ – удельная электропроводность металла.

Подчеркнем, что если на электроны кроме электрической силы $\vec{F}_{эл} = -e\vec{E}$, действует сила другой природы (*сторонняя сила*) $\vec{F}_{стор}$, то их ускорение между соударениями с ионами решетки будет равно:

$$\vec{a} = -\frac{e}{m}\vec{E} + \frac{\vec{F}_{стор}}{m} = -\frac{e}{m}\left(\vec{E} + \vec{E}_{стор}\right),$$

где $\vec{E}_{стор} = -\frac{\vec{F}_{стор}}{e}$. Проводя расчеты, аналогичные только что сделанным, получаем, что в этом случае:

$$\vec{j} = \lambda(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}).$$

Эту формулу называют **законом Ома в дифференциальной форме**.

Заметим, что хотя средняя скорость упорядоченного движения электронов очень мала, ток в проводнике при подключении к источнику тока возникает практически мгновенно. Это связано с тем, что скорость распространения вызывающего возникновение этого тока электрического поля, как оказывается, равна скорости света ($c = 300\,000$ км/с).

3. Зависимость удельного сопротивления металлов от температуры

Величина $\rho = 1/\lambda$ называется удельным сопротивлением. Опыт показывает, что при повышении температуры удельное сопротивление всех металлов увеличивается приблизительно по линейному закону:

$$\rho = \rho_0[1 + a(T - T_0)],$$

где ρ_0 – удельное сопротивление при температуре T_0 (обычно берут $T_0 = 273\ K$), ρ – удельное сопротивление при температуре T, a – температурный коэффициент сопротивления.

Температурные коэффициенты сопротивления большинства чистых металлов сравнительно мало отличаются друг от друга и примерно равны $(0{,}002 \div 0{,}006)\ \frac{1}{K}$. Температурные коэффициенты сопротивления сплавов, как правило, значительно меньше, чем у чистых металлов и могут достигать $10^{-5}\ 1/K$.

Рост удельного сопротивления металлов с температурой может быть качественно объяснен, исходя из классических представлений. Согласно полученному ранее выражению для λ

$$\rho = \frac{1}{\lambda} \approx \frac{2m}{ne^2}\frac{\vec{u}_{\text{тепл}}}{l_{\text{ср}}}.$$

Здесь учтено, что среднее время свободного пробега электрона $\tau_{\text{ср}} \approx l_{\text{ср}}/\vec{u}_{\text{тепл}}$, где $l_{\text{ср}}$ – средняя длина свободного пробега. С классической точки зрения с ростом температуры усиливаются тепловые колебания ионов решетки, в результате чего возрастает их эффективное сечение, и, следовательно, увеличивается вероятность «попадания» в них электронов. Как результат, уменьшается $l_{\text{ср}}$. Кроме того, с ростом температуры с классической точки зрения должна увеличиваться и средняя скорость теплового движения электронов. Однако, как показывает квантовая теория, этого практически не происходит. Оказывается также, что при достаточно низких температурах (для ртути $\leq 4{,}12\ K$; для современных керамических высокотемпературных сверхпроводников

$\lesssim 100\,K$) сопротивление ряда материалов скачком падает до нуля. Это явление, открытое в 1911 году, получило название **сверхпроводимости**.

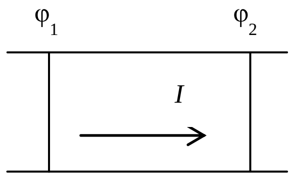
4. Напряжение. Закон Ома для однородного участка цепи

Определение. *Напряжением* U между двумя точками пространства $\overrightarrow{r_1}$ и $\overrightarrow{r_2}$ называется разность потенциалов *электростатического* поля в этих точках:

$$U = \varphi(\overrightarrow{r_1}) - \varphi(\overrightarrow{r_2}).$$

Если состояние участка цепи (его температура, механическое состояние, химический состав и т.п.) не меняется, то для него характерна определенная зависимость между напряжением U на его концах («приложенным к его концам») и силой тока I в нем:

$$I = f(U).$$



Эта зависимость называется *вольт-амперной характеристикой* данного участка цепи. При этом $U = \varphi_1 - \varphi_2$, где φ_1 и φ_2 – потенциалы на «входе» и «выходе» участка цепи соответственно, а сила тока I считается положительной, если ток течет от его входа к его выходу и отрицательной – в обратном случае. Если участок цепи не симметричный, то положения входа и выхода указываются с помощью маркировки.

Определение. Участок электрической цепи, на котором электрический ток создаётся только *электростатическим* полем, называют *однородным*.

Определение. Участок цепи, на котором электрический ток создается не только электростатическими силами, но и не электростатическими, так называемыми *сторонними силами*, называют *неоднородным участком цепи*.

Для многих однородных участков цепи, в особенности для металлических проводников, вольт – амперная характеристика имеет особенно простой вид – сила тока пропорциональна приложенному напряжению:

$$I = \frac{1}{R}U.$$

Этот закон был экспериментально установлен Георгом Омом в 1826 году и носит название **закона Ома для однородного участка цепи**. Коэффициент R называется *электрическим сопротивлением проводника* (*участка цепи*), а обратная величина $1/R$ – *электропроводностью проводника*. Электропроводность зависит от вещества, из которого сделан проводник, от его геометрических размеров и формы. Для сопротивления проводника постоянного сечения S и длины L справедлива следующая формула:

$$R = \rho \frac{L}{S}.$$

Единица сопротивления в СИ называется ом (Ом). 1 Ом равен сопротивлению проводника, между концами которого возникает напряжение 1 В при силе постоянного тока 1 А.

5. Последовательное и параллельное соединение проводников

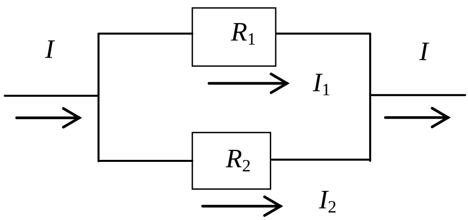
Утверждение. В проводнике с постоянным током, находящемся в постоянных внешних силовых полях, распределение зарядов со временем не меняется. Иными словами, если в какую-то область проводника за время Δt входит заряд $\Delta q_{\text{вх}}$, то такой же заряд за это же время из этой области и выходит: $\Delta q_{\text{вых}} = \Delta q_{\text{вх}}$.

Доказательство. Предположим, что для некоторой части проводника V_0 данное утверждение не справедливо. Тогда спустя время Δt эта часть проводника приобретет дополнительный заряд $\Delta q = \Delta q_{\text{вх}} - \Delta q_{\text{вых}}$. Этот заряд будет создавать дополнительное электрическое поле $\Delta\vec{E}$, которое по закону Ома в дифференциальной форме будет изменять вектор плотности тока. Но тогда это уже не будет постоянным током. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Следствие. Сила *постоянного* электрического тока для любых полных сечений проводника одинакова.

При параллельном соединении проводников *напряжения* U_1 *и* U_2 *на их концах одинаковы по определению параллельного соединения*:

$$U_1 = U_2 = U.$$



Кроме того, по следствию из только что доказанного утверждения $I = I_1 + I_2$, и по закону Ома для однородного участка цепи

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, \qquad I_2 = \frac{U}{R_2}.$$

Объединяя три последние формулы, имеем:

$$I = I_1 + I_2 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)U = \frac{1}{R}U.$$

где $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ – общее сопротивление рассматриваемой цепи.

Если цепь состоит из N параллельно соединенных проводников с сопротивлениями R_1, R_2, …,R_N, то, рассуждая аналогично, получим, что общее сопротивление цепи R определяется формулой:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N}.$$

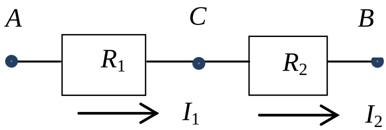
Таким образом, *при параллельном соединении проводников полная проводимость цепи равна сумме проводимостей всех соединённых проводников*. Кроме того,

$$\frac{I_i}{I_j} = \frac{U}{R_i} : \frac{U}{R_j} = \frac{R_j}{R_i} \quad (i, j \in \{1, 2, \dots, N\}),$$

т. е. *силы токов в соединенных параллельно проводниках обратно пропорциональны их сопротивлениям.*

При последовательном соединении проводников сила постоянного тока во всех проводниках одинакова:

$$I = I_1 = I_2.$$



Кроме того, по определению напряжения

$$U = \varphi_A - \varphi_B = (\varphi_A - \varphi_C) + (\varphi_C - \varphi_B) = U_1 + U_2,$$

где U_1, U_2 – напряжение на концах первого и второго проводников соответственно, и по закону Ома для однородного участка цепи:

$$U_1 = IR_1, \qquad U_2 = IR_2.$$

Объединяя три последние формулы, имеем:

$$U = I(R_1 + R_2) = RI,$$

где $R = R_1 + R_2$ – общее сопротивление рассматриваемой цепи.

Если цепь состоит из N последовательно соединенных проводников с сопротивлениями R_1, R_2, …,R_N, то, рассуждая аналогично, получим, что общее сопротивление цепи:

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_N.$$

Таким образом, *при последовательном соединении проводников полное сопротивление цепи равно сумме сопротивлений всех соединённых проводников*. Кроме того,

$$\frac{U_i}{U_j} = \frac{IR_i}{IR_j} = \frac{R_i}{R_j} \qquad (i, j \in \{1, 2, \dots, N\}),$$

т. е. *напряжения на последовательно соединенных проводниках распределяются пропорционально их сопротивлениям*.

6. Гальванический элемент. ЭДС

Примером неоднородного участка цепи, на котором кроме электростатических сил действуют и не электростатические силы, является **гальванический элемент**.

Первый в истории гальванический элемент был создан в самом конце XVIII века итальянским физиком А. Вольтом. Теперь его часто называют элементом Вольта. Он состоит из цинкового и медного (первоначально серебряного) электродов, погруженных в раствор серной кислоты.

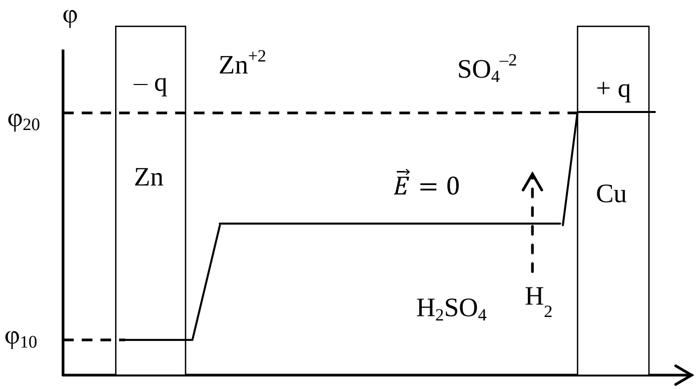
Заметим, что медь и цинк состоят не из нейтральных атомов, а из положительных ионов соответствующего металла и электронов, оторвавшихся от атомов и ставших, как говорят, свободными. Отметим также, что и в водном растворе серной кислоты значительная часть её молекул (H_2SO_4) превращается в три иона – два положительно заряженных иона водорода и один отрицательно заряженный ион кислотного остатка с двойным зарядом:

$$H_2SO_4 \to 2H^+ + SO_4^{2-}.$$

Посмотрим, что происходит, когда в такой раствор погружают электроды.

При погружении цинка в раствор кислоты ионы цинка Zn^{2+} в результате взаимодействия с ионами SO_4^{2-} отрываются от электрода и переходят в раствор. При этом на электроде образуется избыток электронов, и он становится отрицательно заряженным. По мере накопления ионов цинка в растворе некоторая их часть возвращается обратно, притягиваемая отрицательно заряженным электродом. В конце концов устанавливается динамическое равновесие: число ионов, покидающих цинк, становится равным числу ионов, возвращающихся в него обратно. При этом электрод остается заряженным отрицательно, а раствор вблизи электрода за счет ионов цинка получает положительный заряд. Если с электрода убрать часть отрицательного заряда, то равновесие нарушится в пользу перехода новых ионов Zn^{2+} в раствор, который будет происходить вплоть до восстановления динамического равновесия. При этом равновесная разность потенциалов, существующая в тонком слое вблизи электрода, полностью определяется сторонними силами химического (молекулярного) взаимодействия цинка с кислотой.

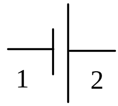
Появление дополнительных положительных ионов около цинкового электрода вызывает перераспределение уже имеющихся ионов внутри раствора: часть ионов кислотного остатка SO_4^{2-} из соседнего слоя перемещается ближе к электроду, а часть положительных ионов H^+ оттесняется в более удаленный слой. Подобные перемещения происходят во всех слоях раствора, вплоть до слоя, прилегающего к медному электроду. Эти перемещения происходят до тех пор, пока результирующее электростатическое поле внутри раствора не станет равным нулю, кроме небольших областей, непосредственно примыкающих к электродам.



Рассмотрим теперь, что происходит около медного электрода. В отличие от цинка, медь почти не растворяется в кислоте, т. е. не отдаёт в раствор свои ионы. Наоборот, положительные ионы водорода из раствора, попадая на медный электрод, отбирают у него свободные электроны и нейтрализуются. Медный электрод становится положительно заряженным, а раствор около него приобретает отрицательный заряд.

Итак, медный электрод в элементе Вольта образует положительный полюс, а цинковый – отрицательный. При этом разность потенциалов между ними, также как и разность потенциалов между разомкнутыми электродами любого гальванического элемента, зависит только от природы электродов и электролита и не зависит от размеров элемента. Для элемента Вольта эта разность потенциалов составляет приблизительно 1,1 В. Несмотря на эту разность потенциалов, внутри элемента Вольта с разомкнутыми электродами нет *упорядоченного* движения заряженных частиц: сторонние силы химического происхождения и электростатические силы уравновешивают друг друга. То есть в каждой точке внутри элемента Вольта $\vec{F}_{эл} = -\vec{F}_{стор}$. Поэтому работы сторонних и электростатических сил при перемещении заряда от одного электрода к другому внутри элемента равны по величине и противоположны по знаку: $A_{эл} = -A_{стор}$. *Этот результат справедлив для любого неоднородного участка без тока*.

Определение. Электродвижущей силой (ЭДС) неоднородного участка цепи называется отношение к величине заряда q работы сторонних сил по перемещению этого заряда внутри участка цепи от одного его конца к другому: $\varepsilon = \frac{1}{q} A_{1\to 2}^{стор}$. На схемах неоднородные участки цепи обозначают двумя палочками различной длины.



С другой стороны, по определению разности потенциалов:

$$\varphi_{20} - \varphi_{10} = -\frac{A_{1\to 2}^{эл}}{q}.$$

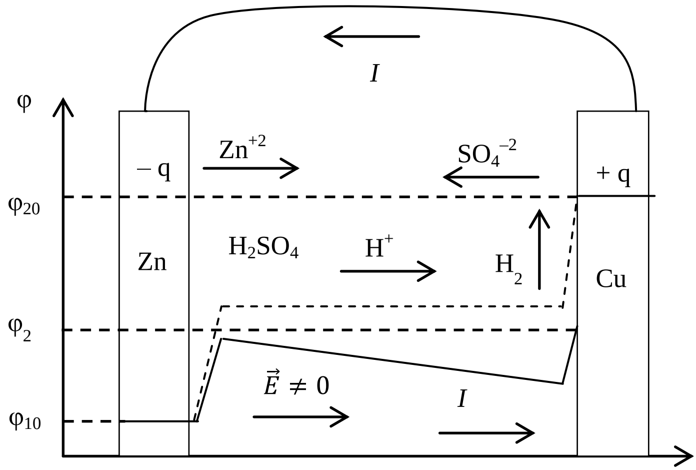
Поэтому, учитывая доказанное ранее соотношение $A_{эл} = -A_{стор}$, получаем, что *в отсутствии тока через любой неоднородный участок разность потенциалов на нем равна ЭДС*:

$$\varphi_{20} - \varphi_{10} = \varepsilon.$$

7. Закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС. Закон Ома для замкнутой цепи

Вернемся к рассмотрению элемента Вольта. Как уже говорилось, медный электрод в нём образует положительный полюс, а цинковый – отрицательный. При этом в отсутствии электрического тока ненулевое электростатическое поле в электролите существует только в небольшой области вблизи электродов, где оно уравновешивает химическое (межмолекулярное) взаимодействие электродов с кислотой. В остальной части электролита, являющегося хорошим проводником, электростатическое поле равно нулю, как и положено для проводников в электростатике.

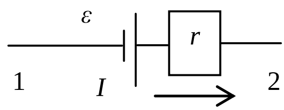
При соединении электродов вторым (металлическим) проводником (первый проводник – электролит), электроны с цинкового электрода начнут двигаться по нему к медному электроду. *Электростатические поля вблизи электродов уменьшатся*, и равновесие нарушится в пользу перехода новых ионов Zn^{2+} с цинкового электрода в раствор и захвата новых электронов ионами H^{+} на медном электроде. В результате электростатическое поле возникнет во всей толще электролита и в электролите также начнётся движение зарядов. Таким образом, и в металлическом проводнике, соединяющем электроды, и в электролите потечет некоторый ток I, а распределение потенциала в элементе Вольта изменится.



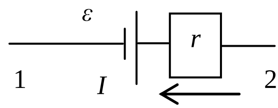
При этом и уменьшение электростатического поля вблизи электродов, и возникновение электростатического поля во всей толще электролита будут приводить к одному и тому же: к уменьшению разности потенциалов между положительным и отрицательным полюсами элемента Вольта. Опыт показывает, что обычно это уменьшение линейно зависит от силы тока, протекающего через элемент Вольта и другие гальванические элементы (источники тока):

$$\varphi_2 - \varphi_{10} = \varepsilon - Ir,$$

где величина r называется внутренним сопротивлением источника тока.



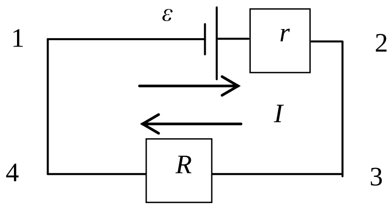
Однако уменьшение разности потенциалов между положительным и отрицательным полюсами элемента Вольта происходит только тогда, когда ток течет внутри элемента от отрицательного полюса к положительному. При обратном протекании тока (за счёт каких-то других источников тока) разность потенциалов, наоборот, возрастает:



$$\varphi_2 - \varphi_{10} = \varepsilon + Ir.$$

Последние две формулы часто называют **законом Ома для участка цепи, содержащего ЭДС**. Из них следует, что реальный источник тока можно формально рассматривать как последовательно соединенные резистор с сопротивлением r и идеальный источник тока, разность потенциалов между положительным и отрицательным полюсами которого всегда равна ε.

Пусть электроды источника тока (неоднородного участка цепи) с ЭДС ε и внутренним сопротивлением r соединены проводником с сопротивлением R. Найдем силу тока I в цепи. По закону Ома для участка 3-4:



$$U = \varphi_3 - \varphi_4 = I\,R.$$

С другой стороны, по закону Ома для неоднородного участка 1-2:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varepsilon - Ir.$$

Но $\varphi_4 = \varphi_1$, $\varphi_3 = \varphi_2$, следовательно:

$$I\,R = \varepsilon - Ir.$$

Откуда получаем:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}.$$

Эту формулу обычно называют **законом Ома для полной цепи**.

8. Опыт Мандельштама – Папалекси

Как уже говорилось, опыты Э. Рикке (1901 г.) по длительному пропусканию электрического тока через соединения различных проводников доказали, что свободными носителями заряда в металлах являются не ионы, и давали основания предполагать, что перенос заряда в металлах осуществляется электронами.

Впервые прямое качественное доказательство этого предположения было получено в опытах, проведённых в 1913 г. российскими физиками Л.И. Мандельштамом и Н.Д. Папалекси. В основе их опытов лежало предположение, что в металлах имеются так называемые свободные (оторвавшиеся от атомов) носители зарядов. Если металлический проводник привести в движение и резко затормозить, то эти носители по инерции продолжат движение относительно ионной решетки, т. е. в проводнике возникнет ток. В своих опытах Мандельштам и Папалекси использовали катушку из проволоки, а её изолированные от корпуса выводы оснастили скользящими контактами, к которым был подключен динамик (наушник). Катушку раскручивали, а затем резко тормозили. При торможении катушки в динамике раздавался звук, который означал, что в это время через цепь проходил импульс тока. Три года спустя, в 1916 году, американские физики Ричард Толмен и Томас Стюарт в аналогичном эксперименте провели количественные измерения, присоединив к выходам катушки уже не динамик, а гальванометр.

Поскольку в описанных опытах вклад в ЭДС даёт только сила инерции, связанная с наличием тангенциального ускорения, то получить формулу для заряда, протекающего через катушку при её торможении, можно рассмотрев торможение поступательно движущегося участка проводника. Будем работать в системе отсчета связанной с проводником (его кристаллической решеткой). Ось X направим вдоль начальной скорости проводника. Если проводник тормозится с ускорением a, то эта система отсчета является неинерциальной, и на свободные носители заряда в ней действуют одинаковые по всей длине l проводника силы инерции

$$F_{\text{ин},x} = -ma_x = -m\frac{dv_x}{dt},$$

которые в данном случае являются сторонними силами. Возникающая в проводнике ЭДС по определению будет равна:

$$\varepsilon = \frac{F_{\text{ин},x}}{q_0}l = -\frac{ml}{q_0}\frac{dv_x}{dt},$$

где q_0 – алгебраическая величина заряда свободного носителя заряда, dv_x – скорость проводника в неподвижной (лабораторной) системе отсчета, и ЭДС считается положительной, если создаёт ток в положительном направлении оси X.

Если сопротивление всей цепи R, то по закону Ома для замкнутой цепи, протекающий через нее ток (положительное направление которого совпадает с положительным направлением оси X) будет определяться следующей формулой:

$$I \equiv \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{ml}{q_0 R}\frac{dv_x}{dt},$$

т. е. при изменении скорости проводника на dv_x по цепи в положительном направлении оси X протекает заряд

$$dq = -\frac{ml}{q_0 R}dv_x.$$

Следовательно, за все время до остановки проводника по цепи пройдет заряд

$$Q = -\frac{ml}{q_0 R}\left(0 - v_{o,x}\right) = \frac{mlv_{o,x}}{q_0 R}.$$

В своих опытах Ричард Толмен и Томас Стюарт измерили величину и знак заряда Q, который протекал через гальванометр за время торможения катушки. При этом знак определялся по направлению отклонения стрелки гальванометра. В результате были найдены знак носителя заряда q_0, который оказался отрицательным, и отношение заряда носителя к его массе ($\left|\frac{q_0}{m}\right| = \left|\frac{v_0 l}{RQ}\right|$). Это отношение получилось близким к отношению заряда электрона к его массе, известному из опытов, выполненных другими методами.

9. Правила Кирхгофа

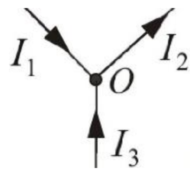
До сих пор мы рассматривали так называемые неразветвленные электрические цепи. Исключение составлял только проведенный выше расчет сопротивления параллельного соединения проводников.

Определение. Цепи, в некоторых точках которых соединяются три или более проводника, называются *разветвленными*. А сами эти точки называются *узлами цепи*.

Для упрощения расчета разветвленных цепей Кирхгоф на основе законов Ома, а также ряда других соображений, разработал специальные правила, называемые *правилами Кирхгофа*.

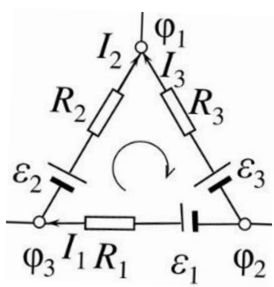
Ранее было доказано, что распределение зарядов в электрической цепи с постоянным током не зависит от времени. Значит, в узлах не может происходить накопления электрических зарядов любого знака. С учётом закона сохранения заряда, отсюда сразу следует, что *суммарный ток, втекающий в узел, равен суммарному току, вытекающему из узла*:

$$|I_{\text{втек}}| = |I_{\text{вытек}}|. \tag{9.1}$$



Соотношение (9.1) называют ***первым правилом Кирхгофа***. Если, при рассмотрении ***каждого*** узла, ток, втекающий в этот узел, считать положительной величиной, а ток, вытекающий из него – отрицательной, то (9.1) можно сформулировать иначе: а***лгебраическая сумма сил токов для каждого узла электрической цепи равна нулю***:

$$\tilde{\tilde{I}}_1 + \tilde{\tilde{I}}_2 + \dots + \tilde{\tilde{I}}_N = 0.$$



В примере, изображенном на рисунке $\tilde{\tilde{I}}_1$, $\tilde{\tilde{I}}_3$ – величины положительные, а $\tilde{\tilde{I}}_2$ – отрицательная ($\tilde{\tilde{I}}_{1,3} = I_{1,3}$, $\tilde{\tilde{I}}_2 = -I_2$).

Второе правило Кирхгофа относится к отдельным замкнутым контурам цепи. Оно отражает тот факт, что в силу потенциальности электростатического поля, полное изменение потенциала вдоль любого замкнутого контура равно нулю. Для записи этого факта произвольно выбираются считающиеся положительными направления токов во всех участках цепи, не содержащих узлы, и направление обхода контура. Например, на рисунке положительные направления, выбранные для токов I_1 и I_2, совпадают с выбранным направлением обхода контура, а положительное направление, выбранное для тока I_3, противоположно ему. Запишем закон Ома для участков 12, 23 и 31:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varepsilon_3 - I_3 R_3,$$
$$\varphi_2 - \varphi_3 = -\varepsilon_1 + I_1 R_1,$$
$$\varphi_3 - \varphi_1 = -\varepsilon_2 + I_2 R_2.$$

Складывая все три уравнения, получим:

$$\varepsilon_3 - I_3 R_3 - \varepsilon_1 + I_1 R_1 - \varepsilon_2 + I_2 R_2 = 0. \tag{9.2}$$

Однако удобнее данное выражение записать в следующем виде:

$$I_1 R_1 + I_2 R_1 - I_3 R_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \,.$$

Последнее соотношение выражает второе правило Кирхгофа применительно к рассмотренному контуру. В общем случае, **второе правило Кирхгофа** утверждает: *в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма падений напряжений $\widetilde{I_k} R_k$ на всех его участках равна алгебраической сумме приложенных в этих участках ЭДС $\widetilde{\varepsilon_k}$*:

$$\sum_{k=1}^{N} \widetilde{I_k}\, R_k = \sum_{k=1}^{N} \widetilde{\varepsilon_k},$$

где N – число участков в контуре.

При этом *токи $\widetilde{I_k}$ считаются положительными, если выбранные для них положительные направления совпадают с выбранным направлением обхода контура. ЭДС $\widetilde{\varepsilon_k}$ источников тока считаются положительными, если при обходе контура в выбранном направлении их проходят от отрицательного полюса к положительному полюсу* (*т. е. в том же направлении, в котором через них течёт ток короткого замыкания*). В приведенном выше примере: $\tilde{I}_{1,3} = -I_{1,3}$; $\tilde{I}_2 = I_2$; $\widetilde{\varepsilon_1} = -\varepsilon_1$, $\widetilde{\varepsilon_2} = \varepsilon_2$.

Следует иметь в виду, что, если пользоваться вторым правилом Кирхгофа в форме (9.2), то правило знаков для ЭДС необходимо изменить на противоположное!

Заметим также, что если в результате решения задачи получают отрицательное значение для силы тока на каком-либо участке, то это означает, что ток на этом участке идет в направлении, противоположном выбранному положительному направлению.

10. Закон Джоуля – Ленца

Для участка цепи, содержащего проводник сопротивлением R, по закону Ома

$$\varphi_1 - \varphi_2 = IR,$$

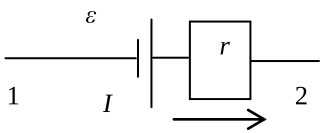
где I – сила тока, текущего по проводнику, φ_1 – потенциал на входе, а φ_2 – потенциал на выходе тока из проводника.

Заметим, что уже в этом уравнении заложено энергетическое соотношение для участка цепи, т. к. разность потенциалов $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – это отношение работы, совершаемой электрическим полем над зарядом q при его перемещении от входа (1) к выходу (2), к величине этого заряда. Если же за время Δt через сопротивление R протечет заряд $\Delta q = I\Delta t$, то электрическое поле совершит над этим зарядом работу:

$$A_{\text{эл}} = \Delta q(\varphi_1 - \varphi_2) = I^2 R\Delta t.$$

При рассмотрении энергетического баланса на участках цепи, содержащих ЭДС, необходимо также учитывать работу сторонних сил. Как следует из определения ЭДС, работа сторонних сил $A_{\text{стор}}$ по переносу заряда Δq внутри источника тока от отрицательного полюса к положительному равна $A_{\text{стор}} = \varepsilon\Delta q$. С другой стороны, и закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС, выглядит несколько иначе:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ir - \varepsilon \qquad \text{или} \qquad (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon = Ir.$$



Полная работа электрических и сторонних сил за время Δt, очевидно, будет равна:

$$A_{\text{полн}} = A_{\text{эл}} + A_{\text{стор}} = \Delta q\{(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon\} = \{\Delta q = I\Delta t\} = I^2 R\Delta t.$$

Величину

$$V = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon,$$

которая равна отношению работы, совершаемой суммарным полем кулоновских и сторонних сил при перемещении на участке 1-2 цепи некоторого заряда, к величине этого заряда, называют ***падением напряжения*** (не путать с напряжением U, которое равно разности потенциалов электростатического поля на входе (1) и выходе (2) участка 1-2: $U = \varphi_1 - \varphi_2$).

С учетом этого обозначения закон Ома для любого участка цепи (как однородного, так и неоднородного) может быть записан единым образом:

$$V = Ir.$$

Это же относится к полной работе электростатических и сторонних сил за время Δt:

$$A = I\,V\,\Delta t = I^2 r \Delta t = \frac{V^2}{r} dt.$$

Часто эту работу называют *работой электрического тока*. Из последней формулы получаем, что мощность P электрического тока равна:

$$P = \frac{A}{\Delta t} = I\,V = I^2 r = \frac{V^2}{r}.$$

Если образующие участок цепи проводники неподвижны, а электрический ток постоянен, то работа электрического тока по первому началу термодинамики целиком расходуется на увеличение внутренней энергии проводников. При этом если в проводнике не происходит никаких химических превращений (как, например, в металлах), то это увеличение внутренней энергии происходит за счет увеличения энергии хаотических колебаний ионов или атомов около положения равновесия, что приводит к увеличению температуры проводника. С точки зрения атомно-молекулярного строения твердых тел, это объясняется тем, что свободные электроны в проводнике под действием электростатических и (или) сторонних сил приобретают дополнительную кинетическую энергию, которую отдают при столкновении атомам или ионам кристаллической решетки.

Исторически сложилось так, что о таком действии протекающего тока принято говорить как о выделении тепла в проводнике под воздействием тока. Дело в том, что обычно рост температуры проводников прекращается вследствие теплообмена с окружающей средой. В результате *в установившемся режиме* вместо увеличения внутренней энергии проводника мы наблюдаем процесс теплопередачи, при котором величина Q переданного внешней среде тепла равна работе электрического тока:

$$Q = I\,V\,\Delta t = I^2 r \Delta t = \frac{V^2}{r} \Delta t.$$

Этот закон, определяющий количество выделившегося в проводнике тепла при протекании по нему тока, называют **законом Джоуля – Ленца**, в честь двух ученых, которые его независимо экспериментально открыли (в 1841 и 1844 годах соответственно).

Как уже говорилось, на участке цепи работу могут совершать и электростатические, и сторонние силы. Однако если рассматривать замкнутую цепь в целом, то работа электростатических сил в силу их потенциальности будет равна нулю. И, следовательно, в конечном счете, все энергетические изменения в цепи будут происходить только за счет работы сторонних сил на участках, содержащих ЭДС. На каждом участке мощность сторонних сил равна

$$P_{\text{стор}}^{(k)} = \varepsilon_k \widetilde{I_k},$$

где ток $\widetilde{I_k}$ считается положительным, если он течёт внутри источника тока от отрицательного полюса к положительному. Поэтому, если известны токи, протекающие через все участки цепи с ЭДС, то можно легко найти полную мощность тепловых потерь в цепи в установившемся режиме, просуммировав алгебраические мощности сторонних сил по всем неоднородным участкам цепи.

11. Электрический ток в электролитах. Законы электролиза

Электролиты *– это жидкие и твердые вещества, обладающие ионной проводимостью, т.е. проводники, в которых электрический ток обусловлен движением ионов*. Иногда наблюдается смешанная электронно–ионная проводимость (например, в растворах щелочных металлов в жидком аммиаке NH_3). Наиболее широко используемыми электролитами являются растворы (чаще всего водные) неорганических кислот, солей и оснований. В этом случае ионы проводимости появляются в результате распада молекул растворяющихся веществ, а иногда и растворителя, на заряженные части – ионы. О молекулах, которые распадаются на ионы, говорят, что они *диссоциируют*, а если это происходит в растворах или расплавах, то говорят об **электролитической диссоциации**. Встречаются и другие механизмы возникновения ионной проводимости, например, в ионных кристаллах с дефектами кристаллической структуры.

Рассмотрим подробнее поведение ионов проводимости в растворе. Пока внешнее электрическое поле отсутствует, ионы совершают только беспорядочное тепловое движение, периодически рекомбинируя, т.е. соединяясь обратно в нейтральную молекулу. Другие нейтральные молекулы, наоборот, могут диссоциировать на ионы. Но если в раствор опустить два электрода (проводника), подсоединенных к источнику тока, то в растворе возникает электрическое поле. В результате ионы, подобно электронам в металлах, начинают дрейфовать в направлении действующей на них силы. Положительные ионы (катионы) двигаются к катоду (электроду, соединенному с отрицательным полюсом источника), а отрицательные ионы (анионы) – к аноду (электроду, подключенному к положительному полюсу источника).

Отсюда ясно, что микроскопическая теория электропроводимости электролитов аналогична теории электропроводимости металлов. В частности, для них выполняется и закон Ома. Отличие же заключается в том, что достигнув анода, анионы отдают электроны, становясь нейтральными атомами, и выделяются в свободном виде. Аналогично, катионы, достигнув катода, приобретают недостающие электроны и также выделяются в свободном виде. Такое *разложение электролита на его составные части под действием электрического тока называется* **электролизом**.

Поскольку электролиз происходит при прохождении тока через любой электролит, то часто используют несколько другое по форме определение электролитов, формально отличающееся от данного выше, но совпадающее с ним по сути. А именно, часто ***электролитами*** *называют вещества, химически разлагающиеся на составные части, когда по ним проходит электрический ток*. При этом, однако, следует понимать, что протекание электрического тока приводит лишь к пространственному разделению ионов и их превращению в нейтральные атомы, а сами ионы существуют в электролитах не зависимо от протекания по нему электрического тока.

Электролиз был открыт в конце XVIII века, а его интенсивное исследование началось в 1800 году сразу же после создания Вольтом источника тока. Явление электролиза описывают два закона, открытых Фарадеем в 1833-1834 годах.

Первый закон Фарадея: *масса выделившегося на электроде вещества пропорциональна времени t прохождения через электролит постоянного тока и силе этого тока I*:

$$m = kIt.$$

Коэффициент пропорциональности k называется *электрохимическим эквивалентом* данного вещества.

Второй закон Фарадея: *электрохимический эквивалент вещества пропорционален его химическому эквиваленту* $\frac{\mu}{Z}$ (*μ – молярная масса вещества, а Z – валентность иона*):

$$k = \frac{1}{F}\frac{\mu}{Z},$$

где F – постоянная Фарадея, одинаковая для всех электролитов.

Эти законы, полученные экспериментально, могут быть легко выведены, исходя из современных представлений о строении вещества. Число N ионов, осевших на электроде, очевидным образом связано с зарядом $Q = It$, прошедшим через электролит:

$$N = \frac{Q}{Z|e|},$$

где $Z|e|$ – заряд одного иона. Так как масса одного иона $m_0 = \frac{\mu}{N_A}$, то масса вещества, выделившегося на электроде:

$$m = m_0 N = \frac{\mu}{N_A}\frac{It}{Z|e|} = kIt.$$

где

$$k = \frac{\mu}{N_A}\frac{1}{Z|e|}.$$

Таким образом, постоянная Фарадея $F = N_A|e| = 9{,}65 \cdot 10^4\ ^{\text{Кл}}/_{\text{моль}}$ оказывается равной заряду одного моля электронов.

С другой стороны, законы Фарадея позволяют, изучая процесс электролиза, экспериментально определить заряд одновалентного иона, т. е. модуль заряда электрона:

$$|e| = \frac{\mu}{N_A}\frac{It}{Zm}.$$

Опыты, выполненные с различными электролитами, показали, что для всех них $|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Именно этот факт послужил в свое время толчком к выдвижению гипотезы о существовании в природе элементарной наименьшей порции электрического заряда. Такую гипотезу впервые высказал в 1881 году немецкий физик Гельмгольц.

12. Электрический ток в газах. Понятие о плазме

Для изучения электропроводности газов укрепим две металлические пластины параллельно друг другу, соединим одну из них со стержнем, а вторую с корпусом электрометра и сообщим им разноименные заряды. Опыт показывает, что при благоприятных условиях показания электрометра не меняются, и, следовательно, через воздух между пластинами при небольших значениях напряжения электрический ток не проходит. Такой же результат получается при выполнении опыта в любом газе. Однако если газ сильно нагреть или осветить, то газ может стать проводником электрического тока.

Определение. Явление протекания электрического тока через газ, наблюдаемое при одновременном наличии электростатического и не электростатического внешних воздействий на газ, называется *несамостоятельным* (*газовым*) *разрядом*.

Определение. Процесс отрыва электрона от атома (молекулы) называется *ионизацией атома* (*молекулы*). Минимальная энергия, которую необходимо затратить для отрыва электрона, называется *энергией ионизации*.

Энергия связи электронов в атомах и молекулах (энергия ионизации) обычно выражается в **электронвольтах** (эВ).

Определение. Один электронвольт равен работе, которую совершает электрическое поле при перемещении электрона между точками поля, разность потенциалов между которыми равна 1 В:

$$1\ \text{эВ} = 1{,}6\ 10^{-19}\text{Кл} * 1\ \text{В} = 1{,}6\ 10^{-19}\ \text{Дж}.$$

Например, энергия ионизации атома водорода равна $13{,}6$ эВ, молекулы кислорода – 12 эВ, азота – 16 эВ и т. д.

Повышение температуры газа делает его проводником электрического тока, потому что часть нейтральных атомов или молекул газа при взаимных столкновениях превращается в ионы. Электрон может быть оторван от атома (молекулы) при соударениях с другими атомами или молекулами, если кинетическая энергия соударяющихся частиц превысит энергию ионизации. Но кинетическая энергия теплового движения атомов и молекул прямо пропорциональна абсолютной температуре газа, поэтому с повышением температуры газа увеличивается число соударений атомов или молекул, сопровождающихся ионизацией.

Определение. Процесс возникновения свободных электронов и положительных ионов в результате столкновений атомов и молекул газа при высокой температуре называется *термической ионизацией*.

Заметной интенсивности термическая ионизация достигает, начиная с температур порядка $10^3 \div 10^4$ К. Она является одним из механизмов образования *плазмы*.

Определение. *Плазмой* называют частично или полностью ионизированный газ, в котором плотности положительных и отрицательных зарядов практически одинаковы.

Энергия, необходимая для отрыва электрона от атома или молекулы может быть передана также и световым или другим излучением. Ионизация атомов или молекул под действием света называется **фотоионизацией**.

Опыт показывает, что при некотором значении напряжения между электродами, зависящем от природы газа и его давления, в газе возникает электрический ток и без воздействия не электростатических ионизаторов.

Определение. Явление прохождения через газ электрического тока при наличии *только* электростатического внешнего воздействия называется *самостоятельным* (*газовым*) *разрядом*.

Основной механизм ионизации газа при самостоятельном электрическом разряде – ионизация атомов и молекул ударами электронов.

Ионизация электронным ударом становится возможной, если электрон под действием электростатического поля напряженностью E на длине свободного пробега λ приобретает кинетическую энергию W_k, большую энергии ионизации A_u. По теореме об изменении кинетической энергии $W_k = |e|E\lambda$, поэтому условие ионизации можно записать в виде:

$$|e|E\lambda \geq A_u.$$

Первичный электрон и вторичный, возникший в результате ударной ионизации, вновь ускоряются под действием электрического поля, и каждый из них при следующих соударениях освобождает еще по одному электрону и так далее. Число свободных электронов нарастает лавинообразно до тех пор, пока они не достигнут анода.

Положительные ионы, возникающие при этом в газе, движутся под действием электрического поля от анода к катоду. При ударах положительных ионов о катод, а также под действием излучения, возникающего при развитии разряда, с катода могут освобождаться новые электроны. Они разгоняются электрическим полем и создают новые электро-ионные лавины. И этот процесс может продолжаться непрерывно.

Концентрация ионов в плазме по мере развития разряда увеличивается, и сила тока в цепи при наличии самостоятельного разряда обычно ограничивается лишь внутренним сопротивлением источника тока и электрическим сопротивлением других элементов цепи.

13. Формы самостоятельных разрядов в газах

Очень кратко рассмотрим наиболее распространенные формы самостоятельных газовых разрядов.

1. **Искровой разряд** – возникает, если источник тока не способен поддерживать самостоятельный электрический разряд в течение длительного времени. Он прекращается через короткий промежуток времени после начала в результате значительного уменьшения напряжения.

Примеры: молнии; искры, возникающие при расчесывании волос, разделении листов бумаги; разряд конденсатора.

2. **Коронный разряд** – возникает в сильно неоднородных электрических полях. Его основная особенность в том, что процесс ионизации атомов электронным ударом происходит лишь на небольших расстояниях от одного из электродов в области с высокими значениями напряженности электрического поля.

Примеры: около проводов ЛЭП с высоким напряжением.

Применение: используются в электрофильтрах для очистки газов от твердых и жидких примесей.

3. **Дуговой заряд** (электрическая дуга) – возникает при разведении на небольшое расстояние двух первоначально соприкасавшихся угольных электродов, присоединенных к источнику тока.

Когда угольные электроды приводят в контакт, они соприкасаются в отдельных небольших участках малого сечения. Поэтому сопротивление этих участков велико, и они сильно разогреваются. Когда угли раздвигают, то электроны, испускаемые в результате термоэлектронной эмиссии (см. пункт 14) раскаленными участками катода, ионизируют воздух и обеспечивают большую концентрацию заряженных частиц в дуге. Рассматривая дуговой разряд через темное стекло, можно заметить, что свет исходит преимущественно от концов углей. Температура углей очень высока. Наиболее горячим является углубление, образующееся на аноде, которое называется кратером. Его температура при атмосферном давлении достигает $4000\ °C$. Для горения дуги достаточно сравнительно небольшого напряжения 40-50 В. При этом сила тока в дуге достигает десятков и даже сотен ампер.

Применение: для сварки и резки металлов, а также в промышленных электропечах для плавки стали.

4. **Тлеющий разряд** – возникает в разреженном газе при относительно небольших значениях напряженности электрического поля. Дело в том, что в разреженном газе длина свободного пробега электрона возрастает, и он успевает прибрести достаточную для ионизации атомов энергию даже при небольшой напряженности электрического поля. При давлении 300-500 Па видны две основные области тлеющего разряда: катодное темное пространство и светящийся столб у анода. Цвет свечения зависит от природы газа.

Применение: в осветительной технике (различные газосветные трубки, лампы дневного света).

14. Электрический ток в вакууме. Вакуумный диод

Если два электрода поместить в герметичный сосуд и удалить из сосуда воздух, то, как показывает опыт, электрический ток между электродами не возникает. Причина заключается в том, что в вакууме нет заряженных частиц, способных переносить электрические заряды от одного электрода к другому. Заряженные частицы – электроны и положительно заряженные ионы – есть в каждом из электродов, но они не могут выйти в вакуум, т. к. удерживаются силами кулоновского притяжения друг к другу. Для освобождения электрона с поверхности твердого тела надо совершить работу против сил электрического притяжения, действующих на отрицательный электрон со стороны положительно заряженных атомных ядер.

Определение. Работа, которую надо совершить для освобождения электрона с поверхности тела, называется *работой выхода*.

Работа выхода обычно выражается в электронвольтах и для большинства металлов лежит в пределах от 2 до 6 эВ.

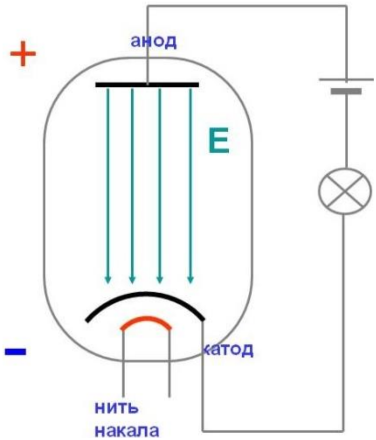
Американский ученый и изобретатель Эдисон в 1879 году обнаружил, что в вакуумной стеклянной колбе может возникнуть электрический ток, если один из находящихся в ней электродов нагреть до высокой температуры. Как показали дальнейшие опыты, нагретый электрод испускает электроны.

Определение. Явление испускания свободных электронов с поверхности нагретых тел называется *термоэлектронной эмиссией*.

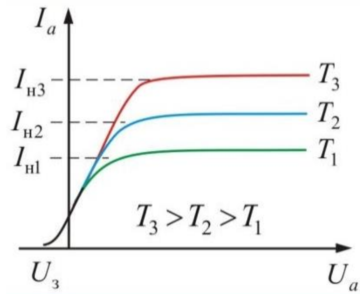
Явление термоэлектронной эмиссии объясняется тем, что при повышении температуры тела увеличивается кинетическая энергия *некоторой части* электронов в веществе (как уже говорилось ранее, средняя скорость теплового движения электронов слабо зависит от температуры). Если кинетическая энергия электрона превысит работу выхода, то он может преодолеть действие сил притяжения со стороны положительных ионов и выйти с поверхности тела в вакуум. Под действием электрического поля между электродами такие вышедшие электроны свободно движутся в вакууме, создавая электрический ток.

На явлении термоэлектронной эмиссии основана работа различных электронных ламп, простейшей из которых является **вакуумный диод**. Он представляет собой вакуумированный баллон, в котором находятся два электрода – анод и катод. Катодом лампы служит спираль с двумя выводами для подключения к источнику тока для разогрева. В результате с поверхности разогретого катода испускаются свободные электроны. При отсутствии электрического поля между катодом и анодом лишь небольшая часть электронов, испускаемых катодом, достигает анода. Большинство вылетающих из катода электронов возвращаются на катод под действием сил электростатического отталкивания со стороны электронов, ранее вылетевших из катода и образующих вокруг него «электронное облако». На рисунке приведен пример одной из возможных конструкций вакуумного диода.

При подключении положительного полюса источника постоянного тока к аноду и отрицательного полюса к катоду, электроны, испускаемые нагретым катодом, движутся под действием электрического поля через вакуум к аноду – в цепи течет электрический ток. Опыт показывает, что вначале, пока напряжение мало, сила тока растет с увеличением анодного напряжения. Дело в том, что при малом напряжении «электронное облако» вблизи катода хотя и уменьшается, но не исчезает. Поэтому часть электронов возвращается назад на катод. По мере увеличения анодного напряжения все большее число вылетающих электронов может преодолеть силы отталкивания и достичь анода. Сила тока увеличивается, а «электронное облако» уменьшается. Для данной температуры накала катода нужно вполне определенное напряжение, чтобы все электроны, вылетающие из катода, достигли анода. Дальнейшее увеличение напряжения уже не может вызвать роста силы тока: наступает насыщение. *Ток, который не изменяется с ростом напряжения, называется* **током насыщения**. Он тем больше, чем выше температура катода.



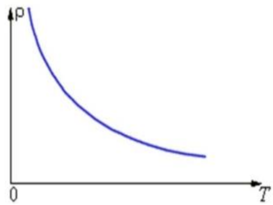
Заметим, что ток через вакуумный диод может протекать только тогда, когда нить накала является катодом. При перемене полюсов источника тока ток в цепи прекращается уже при небольшом «запирающем» напряжении.



Если в аноде вакуумного диода сделать отверстие, то часть электронов, испущенных катодом, пролетит сквозь это отверстие. Их движением далее можно управлять с помощью электрических и магнитных полей. Прибор, в котором используется пучок электронов, свободно летящих в пространстве за анодом, называется электронно-лучевой трубкой. Внутреннюю поверхность стеклянного баллона электронно-лучевой трубки напротив анода покрывают тонким слоем специальных кристаллов и используют в качестве экрана. Электронный пучок (поток электронов, пролетевших за анод) вызывает свечение кристаллов, и сквозь стекло экрана видно светящееся пятно в месте попадания электронов на экран.

15. Собственная и примесная проводимость полупроводников

Многие вещества в кристаллическом состоянии не являются такими хорошими проводниками электрического тока, как металлы, но их нельзя отнести и к диэлектрикам, т. к. они не являются хорошими изоляторами. Такие вещества получили название **полупроводники**. При комнатной температуре удельное сопротивление типичных проводников имеет значение $10^{-8} - 10^{-6}$ Ом·м, диэлектриков: $10^{10} - 10^{16}$ Ом·м, а полупроводников: $10^{-3} - 10^{7}$ Ом·м. Наиболее характерным свойством полупроводников является то, что их удельное сопротивление резко изменяется под влиянием ряда внешних воздействий.



В частности удельное сопротивление полупроводников достаточно быстро уменьшается при росте температуры, и, наоборот, при низких температурах, удельное сопротивление многих полупроводников становится таким же большим, как у диэлектриков.

Экспериментально установлено, что электрический ток в полупроводниках не сопровождается переносом вещества. Отсюда следует, что носителями тока в полупроводниках, как и в металлах, являются электроны. Однако в полупроводниках валентные электроны (т. е. электроны, находящиеся на внешних электронных оболочках) значительно сильнее связаны с атомами, чем в металлах. Поэтому концентрация электронов проводимости при комнатной температуре в полупроводниках незначительна – она в миллиарды раз меньше, чем у металлов.

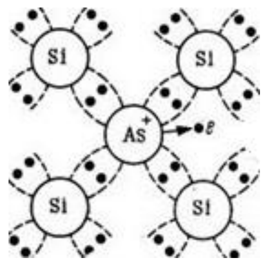
При нагревании кристалла некоторые электроны приобретают энергию достаточную для разрыва его связей с атомами. Такие электроны становятся «свободными» – электронами проводимости. У того атома, от которого электрон перешел в свободное состояние, появилось вакантное место с недостающим электроном. Его называют «дыркой». Дырка ведет себя как положительно заряженная частица. Какой – либо из валентных электронов соседних атомов может занять вакантное место, тогда дырка образуется в соседнем атоме. Такой процесс происходит многократно. Поэтому дырка блуждает по кристаллу. При создании в полупроводнике электрического поля дырки движутся преимущественно в том направлении, куда двигались бы положительные заряды, а электроны – в противоположном направлении. Таким образом, полупроводники обладают одновременно и электронной, и дырочной проводимостью. Не следует, однако, забывать, что, когда говорят о движении дырок, имеют в виду происходящее в действительности в противоположном направлении эстафетное перемещение от одного атома к другому электронов, но не свободных, а тех, которые осуществляют ковалентную связь между атомами полупроводника.

Определение. Проводимость, обусловленная движением свободных электронов и дырок в чистом полупроводниковом кристалле (без примесей), называется *собственной проводимостью полупроводника*.

Итак, при повышении температуры полупроводника число электронов проводимости, и, следовательно, число дырок резко возрастает. Этим и объясняется уменьшение сопротивления полупроводника с повышением температуры. В связи с этим заметим, что к полупроводникам относятся кристаллы, в которых для освобождения электрона требуется энергия не более 1.5 ÷ 2 эВ. Кристаллы с большими значениями энергии связи электронов с атомами, относят к диэлектрикам.

Свойства полупроводников сильно зависят также от содержания примесей.

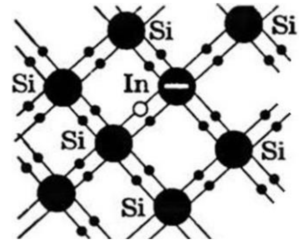
Определение. Проводимость, обусловленная наличием примесей в полупроводнике, называется *примесной проводимостью*.



Пусть, например, в кристалле четырехвалентного кремния имеется примесь пятивалентных атомов мышьяка, которые замещают в части узлов кристаллической решетки атомы кремния. Пятивалентный атом мышьяка вступает в ковалентные связи с четырьмя атомами кремния, а его пятый электрон не занят в связях. При этом он оказывается очень слабо связанным с атомом мышьяка. Поэтому уже при комнатной температуре почти все атомы мышьяка лишаются одного из своих электронов и становятся положительными ионами.

При этом существенно, что положительный ион мышьяка не может захватить электрон у одного из соседних атомов кремния, т. к. энергия связи электронов с атомами кремния значительно превышает энергию связи пятого валентного электрона с атомом мышьяка. Поэтому эстафетного перемещения электронной вакансии не происходит, т. е. новой дырки не образуется. *Примеси, поставляющие электроны приводимости без образования равного им числа дырок, называются* **донорными**.

В полупроводником кристалле, содержащем донорные примеси, электроны являются основными, но не единственными носителями тока, т. к. небольшая часть собственных атомов полупроводникового кристалла ионизирована, и в кристалле имеется небольшое количество дырок. *Полупроводниковые кристаллы, в которых электроны служат основными носителями заряда, а дырки не основными, называются* **электронными полупроводниками** *или* **полупроводниками n-типа** (negative – отрицательный).



При введении в кристалл кремния небольшой примеси трехвалентного элемента, например индия, часть атомов кремния замещается этими атомами. Атом индия может осуществлять связь только с тремя соседними атомами, а связь с четвертым атомом кремния оказывается незавершенной. Атом индия захватывает электрон у одного из соседних атомов кремния и становится неподвижным отрицательным ионом. Захват электрона от одного из атомов кремния приводит к возникновению дырки. *Примеси, захватывающие электроны и создающие тем самым подвижные дырки, не увеличивая при этом числа электронов проводимости, называют* **акцепторными**. Очевидно, что в полупроводниках с *акцепторной примесью* концентрация дырок превышает концентрацию электронов проводимости. Такие полупроводники называются **дырочными** или **полупроводниками p-типа** (positive – положительный).

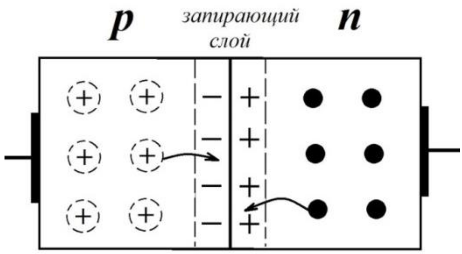
При комнатной температуре в чистом кремнии один свободный электрон приходится на каждые 10^{11} (сто миллиардов) атомов кремния. Отсюда ясно, что если всего 1 % атомов кремния замещен атомами мышьяка (или индия), то концентрация электронов проводимости (или дырок), связанных с примесью, окажется в 10^9 раз больше, чем концентрация свободных электронов (дырок) в чистом кремнии. Примерно во столько же раз уменьшается удельное сопротивление полупроводника.

16. Полупроводниковый диод

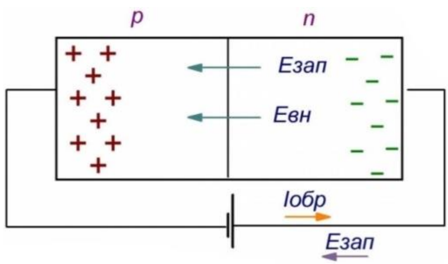
Самым удивительным свойством полупроводников оказалось свойство односторонней проводимости, так называемого *p-n* перехода – контакта двух полупроводниковых кристаллов различного типа проводимости.

Через границу, разделяющую области кристалла с различными типами проводимости, происходит диффузия электронов и дырок. Диффузия электронов из *n*–области в *p*-полупроводник приводит к появлению в *n*–области не скомпенсированных положительных ионов донорной примеси.

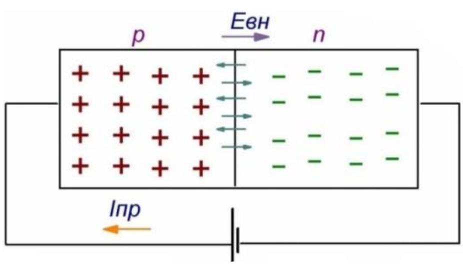
С другой стороны, в *p*-полупроводнике рекомбинация продиффундировавших электронов с дырками приводит к появлению не скомпенсированных зарядов отрицательных ионов акцепторной примеси. Между двумя слоями объемного заряда возникает электрическое поле. По мере накопления объемного заряда напряженность поля возрастает, и оно оказывает все большее противодействие переходам электронов из *n*–области в *p*–полупроводник и соответственно дырок из *p*–области в *n*–полупроводник. Между областями с различным типом проводимости объемные заряды ионов создают запирающее напряжение $U_з \approx 0{,}3 \div 0{,}6$ В.



Если *p*-*n* переход соединить с источником тока так, чтобы с его положительным полюсом была соединена *n*–область, то электроны в *n*–полупроводнике и дырки в *p*–полупроводнике удаляются внешним полем от запирающего слоя в разные стороны, увеличивая его толщину. Этот способ включения *p*–*n* перехода называется включением в запирающем или обратном направлении. Так называемый обратный ток через запирающий слой в этом случае обусловлен исключительно собственной проводимостью полупроводниковых материалов, образующих *p*–*n* переход, т. е. наличием небольшой концентрации свободных электронов в *p*–полупроводнике и дырок в *n*–полупроводнике. Этот ток очень мал и практически не зависит от напряжения (т. к. увеличение напряжения приводит к увеличению толщины запирающего слоя, а значит и его сопротивления).

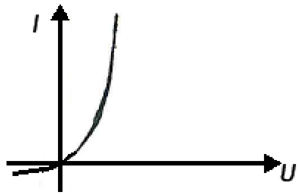


Пусть теперь положительный полюс источника тока соединён с *p*–областью, а отрицательный – с *n*–областью. В этом случае переход основных носителей через *p*–*n* переход облегчается. Двигаясь навстречу друг другу, ос-

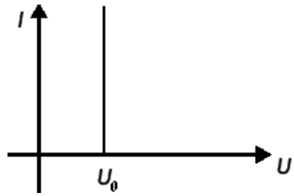


новные носители входят в запирающий слой, уменьшая его сопротивление. В этом случае при напряжениях, превышающих $U_з$, сила тока через p–n переход ограничивается лишь сопротивлением внешней электрической цепи. Этот способ включения называется включением в прямом направлении.

Способность p–n перехода пропускать ток в одном направлении и практически не пропускать его в другом используется в различных полупроводниковых приборах. Простейшим из них является **полупроводниковый диод**, который представляет собой полупроводник с одним p–n переходом. На схемах его обозначают так, как показано на рисунке.



Зависимость силы тока через полупроводниковый диод от напряжения, приложенного к нему, как следует из вышесказанного, имеет вид, показанный на рисунке. Правая ветвь вольт-амперной характеристики ($U > 0$) соответствует прямому включению диода, а левая – обратному (запирающему) включению.



В задачах часто используют понятие «идеальный диод». Его вольт-амперная характеристика имеет вид прямого угла:

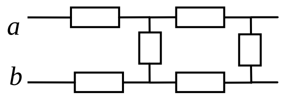
$$\begin{cases} I = 0 \text{ при } U < U_0, \\ I > 0 \text{ при } U = U_0. \end{cases}$$

Причем обычно полагают, что $U_0 = 0$.

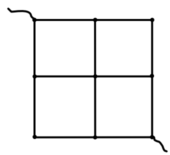
17. Примеры задач

Рекомендуется первоначально пытаться решать задачи самостоятельно, а потом сравнивать свои решения с решениями, которые приведены после списка задач.

Пример 1. Найти сопротивление между точками a и b бесконечной цепи, построенной из одинаковых сопротивлений r (см. рисунок).

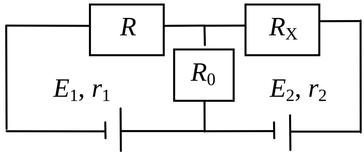


Пример 2. Из 4-х одинаковых кусков проволоки сварен квадрат. Середины противоположных сторон квадрата соединены перемычками из 2-х таких же кусков проволоки. Середины перемычек соединены между собой. Сопротивление каждого куска проволоки равно $2r$. Найдите общее сопротивление такой цепи при под-



ключении источника тока к двум противоположным вершинам квадрата (см. рисунок).

Пример 3. При каком значении сопротивления резистора R_X ток через резистор R_0 в схеме, изображенной на рисунке, будет равен нулю? ЭДС источников E_1 = 2 В и E_2 = 3 В, внутренние сопротивления источников r_1 = 1.0 Ом и r_2 = 2.0 Ом. Сопротивление резистора R = 9.0 Ом.



Пример 4. Электрическая схема состоит из четырех параллельно включенных элементов – источника тока с ЭДС E = 12 В и внутренним сопротивлением r = 2 Ом, конденсатора емкостью C = 10 мкФ, резистора с сопротивлением R_1 = 20 Ом и резистора с сопротивлением R_2 = 5 Ом. Найти заряд на обкладке конденсатора, подключенной к положительному полюсу источника тока.

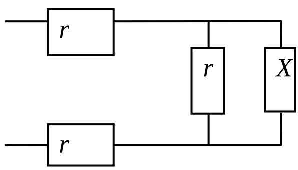
Пример 5. Аккумулятор с ЭДС E_0 = 12 В и внутренним сопротивлением R_0 = 1 Ом, подзаряжается от источника напряжения E_1 = 25 В через резистор сопротивлением R_1 = 8 Ом. Найти мощность, выделяющуюся на резисторе сопротивлением $R_н$ = 26 Ом, подключенном параллельно аккумулятору.

Пример 6. В электрическую сеть напряжением U_0 = 381 В включены последовательно три лампы накаливания, рассчитанные при номинальном напряжении U = 127 В на мощности N_1 = 60 Вт, N_2 = 40 Вт и N_3 = 20 Вт соответственно. Как следует зашунтировать лампы минимальным числом сопротивлений, чтобы напряжения на всех лампах равнялись номинальному? Определите величины шунтирующих сопротивлений в этом случае.

Пример 7. В линии электропередачи, работающей при напряжении U_1 = 200 кВ, тепловые потери составляют η_1 = 4 % от всей отдаваемой мощности. При каком напряжении U_2 следует эксплуатировать эту линию, чтобы тепловые потери составили η_2 = 1 % при той же всей отдаваемой мощности.

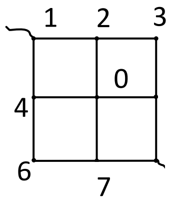
Решения задач

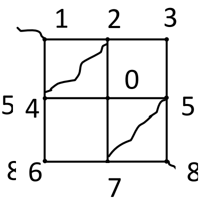
Пример 1. Если добавить одно звено к бесконечной цепи, то в силу бесконечности цепи, сама цепь и её сопротивление не изменятся. Поэтому, если X – искомое сопротивление бесконечной цепи, то такое же сопротивление будет иметь конечная цепь, изоб-



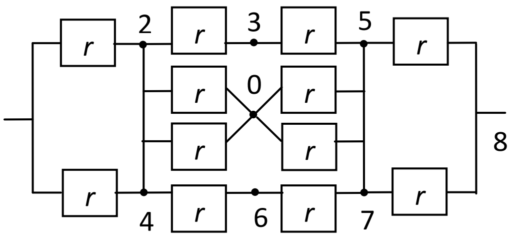
раженная на рисунке. Это конечная цепь, очевидно, состоит из трех последовательно соединенных элементов, второй из которых состоит из двух параллельно соединенных резисторов. Поэтому получаем следующее уравнение для нахождения X: $X = r + rX/(r + X) + r$. После раскрытия скобок имеем: $X^2 - 2rX - r^2 = 0$. Откуда, находим $X = (1 + 3^{1/2})\,r$. Второй корень квадратного уравнения ($X = (1 - 3^{1/2})\,r$) отрицателен и поэтому заведомо не подходит.

Ответ: $X = (1 + 3^{1/2})\,r$.





Пример 2. **Способ 1.** Из симметрии схемы (см. первый рисунок), очевидно, что потенциалы точек 2 и 4 равны. Поэтому если их соединить между собой резистором сколь угодно малого сопротивления, то ток через него не потечет, и распределение токов в остальных частях схемы не изменится. Значит, не изменится и общее сопротивление схемы. По этой же причине без изменения сопротивления цепи можно соединить резистором сколь угодно малого сопротивления точки 5 и 7. Но новая схема (см. второй рисунок) разбивается на три последовательно соединенных звена, каждый из которых, в свою очередь, состоит из двух – трех параллельно соединенных участков. Это особенно хорошо видно, если новую схему перерисовать так, как это сделано на третьем рисунке. В результате последовательного расчета найдем проводимость среднего звена (между точками 2 = 4 и 5 = 7):

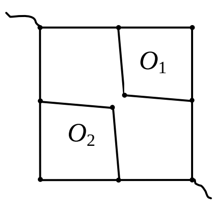


$$1/R_{ср} = 1/(2r) + 1/r + 1/(2r) = 2/r,$$

т. е. его сопротивление $R_{ср} = r/2$. Такое же сопротивление, очевидно, будут иметь и каждое из крайних звеньев. Поэтому окончательно имеем:

$$R_{общ} = r/2 + r/2 + r/2 = 1{,}5r.$$

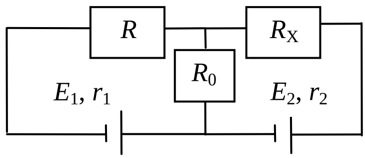
Способ 2. Рассмотрим вспомогательную схему, изображенную на четвёртом рисунке. На этой схеме сопротивления всех участков между точками одинаковы и равны r. Из симметрии схемы следует, что потенциалы в точках O_1 и O_2 совпадают, поэтому если соединить (совместить) эти точки, то токи и напряжения на других участках цепи не изменятся.

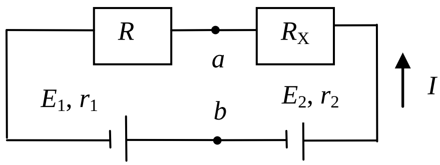


И значит, сопротивление исходной и вспомогательной цепей совпадают. Но последняя состоит из двух параллельно соединенных одинаковых ветвей, каждая из которых включает три последовательно соединенных участка, сопротивлениями r. Поэтому $R_{общ} = 3r/2 = 1{,}5r$.

Ответ: $R_{общ} = 1{,}5r$.

Важное замечание. Если потенциалы двух точек цепи совпадают, то их *всегда* можно соединить любым сопротивлением и, в частности, совместить (т. е. соединить сопротивлением, пренебрежимо малой величины). *Иногда* можно делать и обратную процедуру – разъединять цепь в некоторой её точке, как это было сделано во втором способе решения примера 2. Однако для обоснования этой процедуры надо действовать описанным выше способом: рассматривать вспомогательную цепь, где это разъединение произведено, и доказывать, что потенциалы разъединенных точек в этой вспомогательной цепи равны между собой.



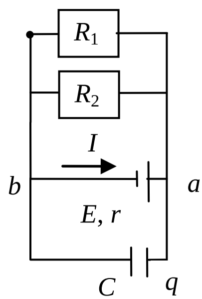


Пример 3. Если ток через резистор R_0 не течет, то потенциалы на его концах в точках a и b равны между собой, и при удалении резистора R_0 из схемы токи и потенциалы в других точках схемы не изменятся (см. второй рисунок). С другой стороны, после удаления резистора R_0 мы получим схему с последовательным соединением двух ЭДС и двух резисторов. Ток I в этой упрощенной схеме можно найти из закона Ома для замкнутой цепи:

$$I = (E_1 + E_2)/(r_1 + r_2 + R + R_X).$$

Пользуясь далее законом Ома для неоднородного участка цепи, содержащего источник E_2 и R_X, получим:

$$\varphi_a - \varphi_b = E_2 - I(r_2 + R_X).$$



Но, как уже говорилось, в силу условия задачи $\varphi_a - \varphi_b = 0$. Из последних двух формул найдем R_X:

$$R_X = E_2(r_1 + R)/E_1 - r_2 = 13 \text{ Ом}.$$

Ответ: $R_X = E_2(r_1 + R)/E_1 - r_2 = 13$ Ом.

Пример 4. Обозначим через q заряд на правой обкладке конденсатора (см. рисунок). В установившемся режиме ток через конденсатор не течёт и напряжение на нём равно напряжению на ЭДС:

$$\varphi_a - \varphi_b = E - Ir = q/C.$$

Ток I через ЭДС можно найти из закона Ома для замкнутой цепи:

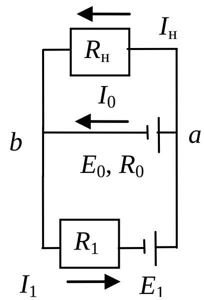
$$I = E/(r + R_{внеш}),$$

где $R_{внеш} = R_1R_2/(R_1 + R_2)$ – сопротивление внешней части замкнутой цепи, состоящей из двух параллельно включенных резисторов с сопротивлениями R_1 и R_2. После подстановки получим:

$$q = C(E - Ir) = CER_1R_2/\{r(R_1 + R_2) + R_1R_2\} = 80 \text{ мкКл}.$$

Ответ: $q = CER_1R_2/\{r(R_1 + R_2) + R_1R_2\} = 80$ мкКл.

Пример 5. Пусть через резистор $R_н$ течёт ток $I_н$, через аккумулятор – ток I_0, а через резистор R_1 течёт ток I_1. Поскольку в условии задачи говорится о подзарядке аккумулятора, то ток через него течет в направлении обратном направлению тока короткого замыкания. Тогда по закону Ома для трех параллельных участков имеем:



$$\varphi_a - \varphi_b = I_нR_н = E_0 + I_0R_0 = E_1 - I_1R_1.$$

Откуда:

$$I_0 = (I_нR_н - E_0)/R_0,$$
$$I_1 = (E_1 - I_нR_н)/R_1.$$

Но по первому правилу Кирхгофа для узла a

$$I_н = I_1 - I_0.$$

Подставляя в последнюю формулу выражения для токов I_0 и I_1, после небольших преобразований получим: $I_н(1 + R_н/R_1 + R_н/R_0) = E_1/R_1 + E_0/R_0$, и, следовательно,

$$I_н = \{E_1/R_1 + E_0/R_0\}/(1 + R_н/R_1 + R_н/R_0).$$

Поэтому мощность, выделяющаяся на резисторе $R_н$ будет равна:

$$P_н = R_нI_н^2 = R_н\{E_1R_0 + E_0R_1\}^2/(R_1R_0 + R_нR_1 + R_нR_0)^2 = 6.5 \text{ Вт}.$$

Ответ: $P_н = R_н\{E_1R_0 + E_0R_1\}^2/(R_1R_0 + R_нR_1 + R_нR_0)^2 = 6.5$ Вт.

Пример 6. По условию $U_0 = 3U$, и значит, нам не придется гасить лишнее напряжение на добавочном к лампам сопротивлении. С другой стороны, токи, на которые рассчитаны лампы, различны. Именно поэтому часть полного тока, текущего в цепи надо будет пропускать через шунтирующие сопротивления, включаемые параллельно двум лампам, у которых номинальные токи являются самыми маленькими. Найдем номинальные токи ламп. Так как мощность, выделяющаяся на резисторе, может быть рассчитана по формуле $N = UJ$, то для номинальных токов имеем: $J_1 = N_1/U$, $J_2 = N_2/U$, $J_3 = N_3/U$. Таким образом, шунтировать надо будет две наименее мощные лампы. При этом напряжение на шунтах должно быть равно номинальному напряжению ламп и через них должны течь избыточные токи. То есть через резистор, шунтирующий лампу мощности N_2 должен течь ток $J_{2ш} = J_1 – J_2$, а через резистор, шунтирующий лампу мощности N_3 должен течь ток $J_{3ш} = J_1 – J_3$. Значит, сопротивления этих шунтов должны быть равны соответственно:

$$R_{2ш} = U/J_{2ш} = U/(J_1 – J_2) = U^2/(N_1 – N_2) = 806.45 \text{ Ом},$$

$$R_{3ш} = U/J_{3ш} = U/(J_1 – J_3) = U^2/(N_1 – N_3) = 403.225 \text{ Ом}.$$

Ответ: $R_{2ш} = U^2/(N_1 – N_2) = 806.45$ Ом, $R_{3ш} = U^2/(N_1 – N_3) = 403.225$ Ом.

Пример 7. Вся передаваемая мощность $W = UJ$, где J – ток в линии электропередачи. Следовательно, чтобы при изменении напряжения вся отдаваемая мощность оставалась прежней, необходимо уменьшить в цепи ток, а это можно сделать, только изменив сопротивление нагрузки, т. к. сама линия электропередачи подразумевается одной и той же. Пусть её сопротивление (без учета сопротивления нагрузки) равно r. Тогда мощности тепловых потерь в двух случаях будут равны соответственно: $P_1 = (J_1)^2r = \eta_1W$ и $P_2 = (J_2)^2r = \eta_2W$. При этом по условию $W = J_1U_1 = J_2U_2$. Таким образом, $U_2/U_1 = J_1/J_2 = (\eta_1/\eta_2)^{1/2} = 2$. Итак, $U_2 = (\eta_1/\eta_2)^{1/2}U_1 = 2U_1 = 400$ кВ.

Ответ: $U_2 = (\eta_1/\eta_2)^{1/2}U_1 = 400$ кВ.

Оглавление