Ответы и решения
Олимпиада «Математическая реальность» (ОМаР)
Младшая и старшая лиги. 29.10.2019

1. На панели кодового замка к двери расположены четыре кнопки, помеченные цифрами 1, 2, 4, 8. Дверь откроется, если нажать три из них в определённом порядке — этот упорядоченный набор из трёх цифр (единственный) называется *кодом входа*. Кнопки на замке можно нажимать в любом порядке и сколь угодно долго: как только в набранной последовательности цифр появится код входа, на панели загорится лампочка, и дверь откроется. Какой наименьшей длины последовательность необходимо набрать, не зная код входа, чтобы наверняка открыть дверь, если заранее известно, что код состоит:

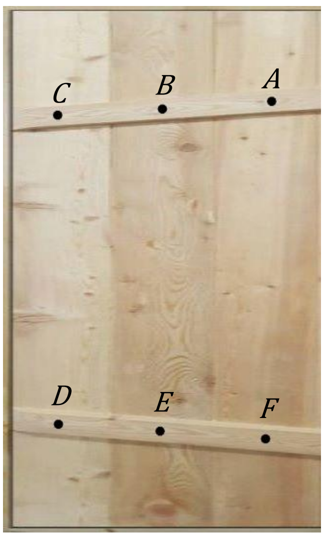
   а) из *различных* цифр, причём цифра 8 в нём не используется;
   б) только из попарно *различных* цифр;
   в) из *любых* данных цифр, не обязательно различных?

Ответ: а) 9; б) $26 = 4 \cdot 3 \cdot 2 + 2$; в) $66 = 4^3 + 2$.

Решение. а) Искомая цепочка цифр, например, такова: 124121421, причём меньшей длины не достаточно (если бы цифр было только $3 \cdot 2 \cdot 1 + 2 = 8$, то все они были бы циклическими перестановками некоторой одной тройки цифр).

б) Рассмотрим ориентированный граф, вершинами которого служат упорядоченные пары (a, b) различных цифр из данного набора, а рёбрами — разрешённые тройки (a, b, c), которые образуются присоединением (по стрелке $\to$) справа к вершине (a, b) вершины (b, c). В этом графе всего $4 \cdot 3 = 12$ вершин и $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ ребра: у каждой вершины есть по 2 выходящих ребра и по 2 входящих. Этот граф связен, так как из любой вершины в любую можно пройти по ребрам, что демонстрирует цепочка
$$(a, b) \to (b, \mathrm{c}) \to (\mathrm{c}, d) \to (d, b) \to (b, a) \to (a, \mathrm{c}).$$
Поэтому этот граф имеет эйлеров цикл, проходящий ровно один раз по каждому ребру, а значит, заметающий все возможные разрешённые тройки (коды замка), — он и задаёт искомую цепочку цифр (их на 2 больше, чем ребер, поскольку начальная вершина добавляет две начальные цифры).

в) Рассмотрим аналогичный граф, в котором разрешены все пары (вершины, которых всего 16) и все тройки (рёбра, их всего 64): у каждой вершины есть 4 выходящих и 4 входящих ребра (при этом возможно, что 2 ребра образуют петлю), причём этот граф связен. Он также имеет эйлеров цикл, задающий искомую цепочку цифр.



2. Новая дверь в баню сделана из трёх вертикальных досок, скрепленных друг с другом с помощью двух поперечных брусков, не обязательно горизонтальных. Со временем доски усыхают (уменьшаются по ширине), и между ними образуются щели, из-за чего они могут слегка вращаться вокруг скрепляющих их болтов A, B, C, D, E и F, где $AB = BC = DE = EF = 1$, $AF = 3$ и $CD = a$. При каких значениях параметра $a \in [2,\ 4]$ такая дверь не сможет со временем деформироваться (например, под действием

силы тяжести)? Какую нагрузку при попытке её деформации будут испытывать болты B и E: на сжатие отрезка BE или на его растяжение?

Ответ: при любом $a \neq 3$; нагрузку на сжатие.

Решение. Так как BE — «средняя линия» четырёхугольника $ACDF$, то $2\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD}$. При этом в самом начале имеем $AF \parallel CD$, поэтому $2BE = AF + CD$. Если параллельность $AF \parallel CD$ нарушится, то получим $2BE < AF + CD$, т.е. отрезок BE сожмётся, что невозможно. Если же параллельность не нарушится, то четырёхугольник $ACDF$ останется трапецией или параллелограммом с исходными длинами сторон: в первом случае он не сможет деформироваться, а во втором сможет.

3. Каждый из вас, открывая кран с водой, наверняка наблюдал, что вытекающая из крана струя воды с ростом расстояния h от выходного отверстия крана становится всё уже и уже. Найдите формулу для толщины струи $d = d(h)$ в зависимости от h. При необходимости, считайте известными диаметр d_0 отверстия крана и начальную скорость v_0 струи. В какой части струи: верхней или нижней — *быстрее* уменьшается её толщина с ростом h?

Ответ: $d(h) = \sqrt[4]{\frac{v_0^2}{v_0^2+2gh}} \cdot d_0$, где g — ускорение силы тяжести.

Решение. Из формул $v = v_0 + gt$, $h = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$ (для скорости и пути при ускорении силы тяжести) и $v_0 d_0^2 = v d^2$ (постоянство потока жидкости), исключая v, находим $v_0 d_0^2 = (v_0 + gt) d^2$, откуда выражаем $t = \frac{v_0}{g}\left(\frac{d_0^2}{d^2} - 1\right)$, а затем, исключая t, находим

$$h = \frac{v_0^2}{g}\left(\frac{d_0^2}{d^2} - 1\right) + \frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{d_0^2}{d^2} - 1\right)^2 = \frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{d_0^4}{d^4} - 1\right),$$

откуда, выражая d через h, получаем ответ.

Из полученного ответа вида $d(h) = \frac{c_1}{(c_2+h)^{1/4}}$ (где $c_1, c_2 > 0$) находим производную $d'(h) = -\frac{1}{4}\frac{c_1}{(c_2+h)^{5/4}}$ — она отрицательна, но по модулю с ростом h убывает, т.е. толщина струи вверху уменьшается быстрее, чем внизу.